

Helge Röpcke

Markus Wessler

# Wirtschaftsmathematik

Methoden - Beispiele - Anwendungen

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 100 Bildern, 113 Beispielen und

156 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen im Internet

HANSER

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b> .....	<b>15</b>
1.1	Folgen, Summen und Reihen .....	15
1.1.1	Grundlagen .....	15
1.1.2	Summenformeln .....	18
1.1.3	Grenzwerte von Folgen .....	22
1.2	Einige wichtige Funktionen .....	27
1.2.1	Lineare Funktionen .....	28
1.2.2	Quadratische Funktionen .....	32
1.2.3	Kubische Funktionen .....	34
1.2.4	Ganzrationale Funktionen .....	36
1.2.5	Gebrochenrationale Funktionen .....	37
1.2.6	Exponentialfunktionen .....	39
1.2.7	Logarithmusfunktionen .....	43
1.3	Übungen zum Kapitel 1 .....	46
<b>2</b>	<b>Differenzialrechnung in <math>\mathbb{R}</math></b> .....	<b>53</b>
2.1	Grundlagen .....	53
2.1.1	Stetigkeit und Differenzierbarkeit .....	53
2.1.2	Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln .....	54
2.1.3	Ableitungen höheren Grades .....	59
2.1.4	Linearisierung und Änderungsraten .....	60
2.2	Numerische Lösung von Gleichungen .....	62
2.2.1	Die Idee des Newton-Verfahrens .....	63
2.2.2	Formalisierung des Iterationsschritts .....	65
2.2.3	Mögliche Probleme beim Newton-Verfahren .....	67
2.3	Monotonie und Krümmung .....	68
2.3.1	Monotonieverhalten .....	68
2.3.2	Krümmungsverhalten .....	70
2.3.3	Ökonomische Bedeutung von Monotonie und Krümmung .....	73
2.4	Optimierung von Funktionen .....	75
2.4.1	Lokale Extrema .....	75

2.4.2	Berechnung lokaler Extrema mit Differenzialrechnung.....	77
2.4.3	Globale Extrema .....	79
2.4.4	Wendepunkte .....	79
2.5	Anwendung der Differenzialrechnung auf ökonomische Funktionen.....	81
2.5.1	Kostenfunktionen .....	82
2.5.2	Absatz, Preis, Umsatz und Gewinn .....	84
2.5.3	Betriebsoptimum und Betriebsminimum .....	88
2.5.4	Angebot und Nachfrage.....	89
2.5.5	Produktionsfunktionen .....	92
2.5.6	Elastizität .....	93
2.6	Übungen zum Kapitel 2.....	97

### **3** Integralrechnung in $\mathbb{R}$ .....102

3.1	Unbestimmtes und bestimmtes Integral.....	102
3.1.1	Stammfunktionen .....	102
3.1.2	Der Integralbegriff.....	103
3.1.3	Partielle Integration .....	106
3.1.4	Substitution .....	107
3.2	Flächenberechnung.....	108
3.2.1	Der Zugang über Summen .....	108
3.2.2	Flächenfunktionen .....	111
3.2.3	Konkrete Flächenberechnungen .....	113
3.3	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung .....	117
3.3.1	Individuelle und kumulierte Konsumentenrente .....	117
3.3.2	Konsumentenrente und Produzentenrente am Markt .....	118
3.4	Uneigentliche Integrale.....	121
3.4.1	Unbegrenzte Flächen .....	121
3.4.2	Deutung als Wahrscheinlichkeiten.....	124
3.4.3	Die Exponentialverteilung bei Warteprozessen .....	126
3.5	Übungen zum Kapitel 3.....	128

### **4** Lineare Algebra .....132

4.1	Lineare Gleichungssysteme.....	132
4.1.1	Der Fall einer Variablen .....	132
4.1.2	Der Fall mehrerer Variablen .....	133
4.1.3	Systeme linearer Gleichungen in mehreren Variablen .....	135
4.1.4	Formulierung von LGS mit Matrizen .....	138
4.2	Der Gauß-Algorithmus .....	139

4.2.1	Der Fall quadratischer Koeffizientenmatrizen .....	139
4.2.2	Die drei Fälle der Lösbarkeit .....	142
4.2.3	Der Fall beliebiger Koeffizientenmatrizen .....	143
4.2.4	Der Gauß-Algorithmus in der Übersicht .....	145
4.3	Anwendungen des Gauß-Algorithmus in der Praxis .....	147
4.3.1	Probleme mit eindeutiger Lösbarkeit .....	147
4.3.2	Probleme mit mehrdeutiger Lösbarkeit .....	149
4.4	Matrizen .....	152
4.4.1	Grundlagen .....	152
4.4.2	Rechnen mit Matrizen .....	153
4.4.3	Deutung der Matrizenmultiplikation .....	156
4.4.4	Das Invertieren von Matrizen .....	159
4.4.5	Determinanten .....	162
4.4.6	Minoren und Entwicklungssatz nach Laplace .....	165
4.5	Ökonomische Anwendungen von Matrizen .....	168
4.5.1	Input-Output-Analyse .....	168
4.5.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung .....	171
4.5.3	Markow-Ketten .....	173
4.6	Übungen zum Kapitel 4 .....	177
<b>5</b>	<b>Lineare Optimierung .....</b>	<b>186</b>
5.1	Einführung .....	186
5.1.1	Warum lineare Funktionen? .....	186
5.1.2	Graphische Darstellungen .....	187
5.1.3	Erste Schritte zur Optimierung .....	189
5.1.4	Formalisierung des Problems .....	191
5.2	Die graphische Methode .....	192
5.2.1	Der zulässige Bereich eines Optimierungsproblems .....	193
5.2.2	Die Zielfunktion und die Gradientenrichtung .....	195
5.2.3	Graphische lineare Optimierung .....	196
5.3	Der Simplex-Algorithmus .....	200
5.3.1	Die Schlupfvariablen und das Starttableau .....	201
5.3.2	Basisvariablen .....	203
5.3.3	Der Basiswechsel .....	204
5.3.4	Das Verfahren im Überblick .....	207
5.4	Methoden zur Minimierung .....	211
5.4.1	Die Zwei-Phasen-Methode .....	211
5.4.2	Der duale Simplex-Algorithmus .....	216

5.5	Diskrete lineare Optimierung .....	220
5.5.1	Grundbegriffe .....	221
5.5.2	Ganzzahlige lineare Optimierung .....	221
5.5.3	Binäre lineare Optimierung .....	226
5.6	Übungen zum Kapitel 5 .....	230
<b>6</b>	<b>Differenzialrechnung in <math>\mathbb{R}^n</math> .....</b>	<b>236</b>
6.1	Ableitungsfunktionen .....	236
6.1.1	Steigungen und Änderungsraten .....	236
6.1.2	Höhere Ableitungen und Hesse-Matrizen .....	242
6.2	Optimierung von Funktionen in mehreren Variablen .....	245
6.2.1	Der Fall zweier Variablen .....	245
6.2.2	Der Fall beliebig vieler Variablen .....	248
6.2.3	Globale Extrema .....	250
6.3	Multivariate Optimierung unter Nebenbedingungen .....	251
6.3.1	Substitution .....	252
6.3.2	Lagrange-Methode mit einer Nebenbedingung .....	258
6.3.3	Bedeutung des Lagrangeschen Multiplikators .....	262
6.3.4	Lagrange-Methode mit mehreren Nebenbedingungen .....	264
6.4	Übungen zum Kapitel 6 .....	267
<b>7</b>	<b>Finanzmathematik .....</b>	<b>271</b>
7.1	Grundlagen der Zinsrechnung .....	271
7.1.1	Wachstumsfaktoren .....	271
7.1.2	Lineare Verzinsung .....	274
7.1.3	Exponentielle und kalenderjährliche Verzinsung .....	276
7.1.4	Unterperiodische Verzinsung .....	278
7.1.5	Stetige Verzinsung als Grenzübergang diskreter Verzinsungen .....	281
7.1.6	Inflation .....	284
7.2	Zahlungsreihen .....	286
7.2.1	Kalkulationszins und Zahlungsreihen .....	286
7.2.2	Anpassung der Perioden .....	290
7.2.3	Äquivalenz von Zahlungsreihen .....	292
7.3	Rentenrechnung .....	293
7.3.1	Nachschüssige und vorschüssige Renten .....	293
7.3.2	Anpassung der Perioden mit der Ersatzrente .....	295
7.3.3	Ewige Renten .....	298
7.4	Tilgungsrechnung .....	299

7.4.1	Der Zahlungsstrom eines Kredits .....	299
7.4.2	Tilgungspläne .....	300
7.4.3	Ratentilgung .....	301
7.4.4	Reguläre Annuitätentilgung .....	302
7.4.5	Prozentannuitätentilgung .....	304
7.4.6	Prozentannuitätentilgung mit Disagio .....	306
7.5	Investitionsrechnung .....	308
7.5.1	Normalinvestitionen und Kapitalwert .....	308
7.5.2	Annuitäten von Investitionsreihen .....	310
7.5.3	Interner Zinsfuß bei Normalinvestitionen .....	311
7.5.4	Interner Zinsfuß bei Nicht-Normalinvestitionen .....	315
7.6	Portfolio-Optimierung .....	317
7.6.1	Optimierung eines Portfolios zweier Aktien .....	318
7.6.2	Optimierung eines Portfolios beliebig vieler Aktien .....	321
7.7	Übungen zum Kapitel 7 .....	323

<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>330</b>
----------------------------------	------------