

NUMERIK 2

Numerik partieller Differentialgleichungen

Rolf Rannacher

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis	x
0 Einleitung	1
0.1 Notation	1
0.2 Ableitung von partiellen Differentialgleichungen	3
0.3 Beispiele	4
0.4 Numerische Methoden	7
1 Theorie partieller Differentialgleichungen	9
1.1 Typeneinteilung	10
1.2 Elliptische Probleme	15
1.2.1 Existenz von Lösungen	16
1.2.2 Eindeutigkeit von Lösungen	21
1.2.3 Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten	23
1.2.4 Regularität von Lösungen	24
1.3 Hilfsmittel aus der Theorie von Funktionenräumen	25
1.3.1 Sobolew-Räume	25
1.3.2 Eigenschaften von Lebesgue- und Sobolew-Räumen	29
1.3.3 Elemente der Spektraltheorie elliptischer Operatoren	33
1.4 Parabolische Probleme	34
1.5 Hyperbolische Probleme	41
1.6 Übungen	43
2 Differenzen-Verfahren für elliptische Probleme	49
2.1 Allgemeine Differenzenapproximationen	49
2.1.1 Konsistenz	51
2.2 Eigenschaften der Differenzgleichungen	55
2.2.1 Das Konvergenzverhalten von Differenzenverfahren	60
2.3 Lösungsaspekte	65
2.3.1 Aufwandsanalyse: ein Beispiel	70
2.4 Übungen	72

3	Finite-Elemente-Verfahren für elliptische Probleme	77
3.1	Allgemeine Projektionsverfahren	77
3.1.1	Beispiele von Galerkin-Ansatzräumen	83
3.1.2	Diskretes Maximumprinzip für Finite-Elemente-Approximationen	89
3.1.3	Approximation krummer Ränder	91
3.2	Allgemeine Finite-Elemente-Ansätze	97
3.3	Interpolation mit finiten Elementen	108
3.4	A priori Fehleranalyse	118
3.4.1	Punktweise Fehlerabschätzung	120
3.5	Implementierungsaspekte	127
3.5.1	Aufbau der Systemmatrizen und Vektoren	128
3.5.2	Konditionierung der Systemmatrix	130
3.5.3	Aufstellung der Systemmatrizen mit numerischer Integration	134
3.6	A posteriori Fehleranalyse und Gittersteuerung	142
3.6.1	Allgemeine a posteriori Fehlerabschätzung	143
3.6.2	Spezielle a posteriori Fehlerschätzer	147
3.6.3	Strategien zur Gittersteuerung	155
3.6.4	Ein Testbeispiel	160
3.7	Übungen	162
4	Lösung der FE-Gleichungen	173
4.1	Krylow-Raum-Methoden	173
4.1.1	Verfahren der konjugierten Richtungen (CG-Verfahren)	175
4.1.2	CG-Verfahren für unsymmetrische und indefinite Probleme	181
4.1.3	Vorkonditionierung (PCG-Verfahren)	182
4.2	Mehrgitterverfahren	184
4.2.1	Mehrgitteralgorithmus im Finite-Elemente-Kontext	186
4.2.2	Konvergenz- und Aufwandsanalyse	192
4.3	Übungen	199
5	Verfahren für parabolische Probleme	203
5.1	Differenzenverfahren für parabolische Probleme	207
5.1.1	Zeitschrittverfahren	207

5.1.2	Stabilität und Konvergenz	215
5.2	FE-Galerkin-Verfahren für parabolische Probleme	224
5.2.1	A priori Konvergenzabschätzungen	225
5.2.2	Fehlerkontrolle und Schrittweitensteuerung	230
5.3	Verallgemeinerungen und Lösungsaspekte	236
5.4	Übungen	242
6	Verfahren für hyperbolische Probleme	243
6.1	Differenzenverfahren für die Wellengleichung	243
6.2	Finite-Elemente-Verfahren für die Wellengleichung	250
6.3	Lösungsaspekte	252
6.4	Übungen	252
A	Lösungen der Übungsaufgaben	253
A.1	Kapitel 1	253
A.2	Kapitel 2	267
A.3	Kapitel 3	274
A.4	Kapitel 4	298
A.5	Kapitel 5	305
A.6	Kapitel 6	306
Index		309