



Michael Krystek

Berechnung der Messunsicherheit

Grundlagen und Anleitung
für die praktische Anwendung

3., erweiterte Auflage 2020

Herausgeber:
DIN Deutsches Institut für Normung e. V.

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Bedeutung der Messunsicherheit	1
1.2	Das Wesen der Messunsicherheit	4
2	Grundbegriffe der Messtechnik	7
2.1	Größen, Größenwerte, Einheiten	7
2.2	Messen	14
2.3	Wahrer Wert einer Messgröße	16
2.4	Messprinzip, Messmethode, Messverfahren	21
2.5	Genauigkeit, Richtigkeit, Präzision	24
2.6	Messabweichungen	29
2.7	Messunsicherheit	33
3	Das Modell der Auswertung	41
3.1	Methoden der Modellbildung	41
3.2	Modellgleichungen	47
3.3	Untermodelle	53
3.4	Modellierungsstrategien	56
3.5	Linearisierung der Modellgleichungen	59
3.6	Quadratische Näherungen	75
3.7	Graphische Modellierung	80
4	Wahrscheinlichkeitstheorie	97
4.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	97
4.2	Ereignisse und Ergebnisse	115
4.3	Mathematische Wahrscheinlichkeit	126
4.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	129

4.5	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	136
4.6	Das Theorem von BAYES und LAPLACE	142
4.7	Stochastische Unabhängigkeit	146
4.8	Zufallsgrößen	150
4.9	Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen	156
4.10	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen	167
4.11	Transformationen von Zufallsgrößen	173
4.12	Erwartungswerte	177
4.13	Varianzen und Standardabweichungen	185
4.14	Mehrdimensionale Zufallsgrößen	192
4.15	Multivariate Verteilungsfunktionen	195
4.16	Multivariate Dichtefunktionen	199
4.17	Marginalisierung und Randverteilungen	206
4.18	Mehrdimensionale Erwartungswerte	212
4.19	Kovarianzen und Korrelationen	218
4.20	Abschätzungen	226
4.21	Der zentrale Grenzwertsatz	228
5	Statistische Methoden	231
5.1	Grundgesamtheiten und Stichproben	231
5.2	Stichprobenfunktionen	234
5.3	Schätzer	236
5.4	Momentenmethode	243
5.5	Maximum-Likelihood-Methode	246
5.6	Methode der kleinsten Quadrate	256
5.7	BAYES-Methode	264
5.8	Intervall- und Bereichsschätzer	279
6	Konzepte der Messunsicherheit	299
6.1	Die traditionelle Methode	299
6.2	Die Methoden des GUM	308
	Anhänge	317
A	Multivariate Messunsicherheit	319
A.1	Einleitung	319
A.2	Univariate Unsicherheitsberechnungen	319
A.3	Multivariate Unsicherheitsberechnung	326

A.4	Matrixdarstellung	329
A.5	Verallgemeinerung	331
A.6	Überdeckungsbereiche	333
A.7	Zusammenfassung der Berechnungen	335
A.8	Beispiele	338
B	Systematische Messabweichungen	345
B.1	Einleitung	345
B.2	Vorbemerkungen	346
B.3	Ignorieren einer systematischen Abweichung	348
B.4	BAYES-Theorem und Marginalisierung	348
B.5	Das Prinzip der maximalen Entropie	350
B.6	Behandlung systematischer Abweichungen	354
B.7	Thermische Längenänderung	356
B.8	Der Kosinusfehler bei der Längenmessung	360
B.9	Der Einfluss von Formabweichungen	363
B.10	Rauschen als systematische Messabweichung	368
	Liste der Definitionen	375
	Liste der Theoreme	379
	Symbolverzeichnis	381
	Literaturverzeichnis	387
	Sachverzeichnis	395