

**Zeitbereichsimplementierung höherwertiger
nichtreflektierender Randbedingungen für die
Simulation instationärer Turbomaschinenströmungen**

*Time-domain Implementation of Higher-order Nonreflecting
Boundary Conditions for the Simulation of Unsteady
Turbomachinery Flows*

Von der Fakultät für Maschinenwesen der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Stefan Henninger

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Peter Jeschke
Priv.-Doz. Dr.-Ing. Hannes Benetschik

Tag der mündlichen Prüfung: 25.02.2019

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	v
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	5
2.1 Modelle und Grundgleichungen der Fluidmechanik	5
2.1.1 Navier-Stokes-Gleichungen	6
2.1.2 Euler-Gleichungen	12
2.1.3 Linearisierte Form der Euler-Gleichungen	13
2.2 Mathematische Analyse der Euler-Gleichungen	14
2.2.1 Quasilineare Form der Euler-Gleichungen	15
2.2.2 Charakteristische Formulierung der Euler-Gleichungen	17
2.3 Strömungsmodell für Turbomaschinenströmung und nichtrefl. Randbedingungen	21
2.3.1 Navier-Stokes-Gleichungen im rot. Referenzsystem	21
2.3.2 Vereinfachtes Strömungsmodell für Randbedingungen	25
3 Literaturrecherche und Stand der Technik	29
3.1 Nichtreflektierende Randbedingungen für die zweidimensionale Wellengleichung	32
3.1.1 Randbedingungen niedriger Approximationsordnung	34
3.1.2 Randbedingungen höherer Approximationsordnung durch Zusatzvariablen	36
3.2 Nichtreflektierende Randbedingungen in der Turbomaschinensimulation	37
3.2.1 Bestimmung der mittleren Änderungen	39
3.2.2 Bestimmung der Änderungen der Schwankungswerte	41
3.3 Einordnung der Arbeit	42
4 Numerische Verfahren	45
4.1 Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen und Turbulenzmodellierung	46

4.2	Finite-Volumen-Methode	49
4.2.1	Diskretisierung der konvektiven Flüsse	50
4.2.1.1	Godunov-Schema	51
4.2.1.2	Roe-Schema	52
4.2.2	Räumliche Diskretisierung der diffusiven Flüsse	56
4.3	Zeitliche Diskretisierung	57
4.4	Randbedingungen	58
4.4.1	Festkörperländer	59
4.4.2	Block-, Periodizitäts- und Symmetrieränder	59
4.4.3	Rotor-Stator Kopplungsebenen	60
4.4.3.1	Stationäre Simulationen - Mischungsebenen	60
4.4.3.2	Instationäre Simulationen	61
4.4.4	Ein- und Ausströmränder	64
4.5	Harmonic Balance-Verfahren	64
5	Randbedingungen	67
5.1	Nichtreflektierende Theorie für die lin. 2D Euler-Gleichungen	67
5.2	Modale Analyse	69
5.3	Exakt nichtreflektierende Randbedingungen	72
5.3.1	Wohlgestelltheit	72
5.3.2	Eintrittsrand	73
5.3.3	Austrittsrand	74
5.4	Asymptotisch exakte nichtreflektierende Randbedingungen	75
5.4.1	Eintrittsrand	78
5.4.2	Austrittsrand	78
5.4.3	Approximation des exakten Kerns mit rationalen Funktionen	79
5.4.4	Implementierung der Randbedingungen	83
5.4.5	Diskussion	84
6	Validierung	87
6.1	Ebene akustische Wellen im Ringkanalsegment	87
6.2	Schauelflattertestfall – Standard-Konfiguration 10	94
6.3	Lineare Turbinenkaskade VKI-LS89	99
6.4	Transsonisches Verdichter-Rig	104
7	Schlussfolgerung und Ausblick	111

A	Anhang	115
A.1	Mathematische Eigenschaften der Euler-Gleichungen	115
A.1.1	Euler-Gleichungen für konservative Zustandsgrößen	115
A.1.2	Euler-Gleichungen für primitive Zustandsgrößen	117
A.2	Differentialoperatoren	121
A.2.1	Gradient eines Tensorfeldes	121
A.2.2	Divergenz eines Tensorfeldes	122
A.3	Lösungsalgorithmus zur Approximation des exakten Kerns	123
A.4	Approximationskoeffizienten des exakten Faltungskerns	126
	Literatur	129