

Prof. Dr. rer. nat. Peter Tittmann

# Graphentheorie

Eine anwendungsorientierte Einführung

3., aktualisierte Auflage

mit 115 Bildern, zahlreichen Beispielen und 92 Aufgaben

HANSER

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Graphen</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1	Definitionen . . . . .	10
1.1.1	Knotengrade . . . . .	11
1.1.2	Wege und Kreise . . . . .	13
1.1.3	Zusammenhang . . . . .	13
1.2	Operationen mit Graphen . . . . .	14
1.2.1	Entfernen von Knoten und Kanten . . . . .	14
1.2.2	Fusion und Kontraktion . . . . .	15
1.2.3	Brücken und Artikulationen . . . . .	16
1.2.4	Operationen mit Graphen . . . . .	16
1.3	Spezielle Graphen . . . . .	17
1.3.1	Der vollständige Graph . . . . .	18
1.3.2	Weg und Kreis . . . . .	19
1.3.3	Bäume . . . . .	19
1.3.4	Bipartite Graphen . . . . .	20
1.3.5	Reguläre Graphen . . . . .	22
1.4	Isomorphe Graphen . . . . .	23
1.4.1	Isomorphie . . . . .	23
1.4.2	Gradfolgen . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Graphen und Matrizen</b> . . . . .	<b>27</b>
2.1	Die Adjazenzmatrix eines Graphen . . . . .	27
2.1.1	Potenzen der Adjazenzmatrix . . . . .	28
2.1.2	Zerlegbare Matrizen . . . . .	29
2.2	Die Inzidenzmatrix . . . . .	30
2.2.1	Die Gradmatrix . . . . .	31
2.3	Abstände in Graphen . . . . .	31
2.3.1	Radius, Durchmesser und Zentrum . . . . .	32
2.3.2	Die Abstandsmatrix . . . . .	34
2.4	Gerüste . . . . .	35
2.4.1	Die Anzahl der Gerüste . . . . .	35
2.4.2	Die Admittanzmatrix und der Satz von Kirchhoff . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Planare Graphen</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Planare Einbettungen . . . . .	41
3.1.1	Ebene Kurven und Einbettungen . . . . .	41
3.1.2	Flächen eines planaren Graphen . . . . .	43
3.1.3	Einbettungen auf der Kugel . . . . .	43
3.1.4	Kreuzungszahl und Dicke . . . . .	44
3.2	Die Eulersche Polyederformel . . . . .	45
3.2.1	Polyeder . . . . .	45
3.2.2	Die Polyederformel für zusammenhängende Graphen . . . . .	46

3.2.3	Die Polyederformel für nicht zusammenhängende Graphen . . . . .	48
3.3	Anwendungen der Polyederformel . . . . .	48
3.3.1	Nichtplanare Graphen . . . . .	48
3.3.2	Der Satz von Kuratowski . . . . .	49
3.3.3	Maximale Kantenzahl planarer Graphen . . . . .	51
3.3.4	Knotengrade in planaren Graphen . . . . .	51
3.3.5	Platonische Körper . . . . .	52
3.4	Der duale Graph . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Unabhängige Knoten- und Kantenmengen . . . . .</b>	<b>57</b>
4.1	Unabhängige Knotenmengen . . . . .	58
4.1.1	Die Unabhängigkeitszahl . . . . .	58
4.1.2	Cliquen . . . . .	61
4.1.3	Die Überdeckungsanzahl . . . . .	62
4.2	Matchings . . . . .	63
4.2.1	Alternierende Wege – der Satz von Berge . . . . .	64
4.2.2	Der Satz von König . . . . .	66
4.3	Der Kantengraph . . . . .	67
4.4	Faktoren . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Färbungen von Graphen . . . . .</b>	<b>72</b>
5.1	Grundlagen . . . . .	72
5.1.1	Zulässige Färbungen . . . . .	72
5.1.2	Die chromatische Zahl . . . . .	73
5.1.3	Schranken für die chromatische Zahl . . . . .	74
5.2	Färbungen von planaren Graphen . . . . .	76
5.3	Das chromatische Polynom . . . . .	78
5.3.1	Der vollständige Graph . . . . .	79
5.3.2	Der Baum . . . . .	79
5.3.3	Die Dekompositionsgleichung . . . . .	79
5.3.4	Der Kreis . . . . .	81
5.3.5	Chromatisches Polynom und chromatische Zahl . . . . .	82
5.3.6	Partitionen der Knotenmenge . . . . .	83
5.4	Eine Anwendung . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Der Zusammenhang von Graphen . . . . .</b>	<b>89</b>
6.1	Der Knotenzusammenhang . . . . .	89
6.2	Der Kantenzusammenhang . . . . .	92
6.2.1	Schnittmengen . . . . .	92
6.2.2	Schnitte . . . . .	93
6.2.3	Die Kantenzusammenhangszahl . . . . .	94
6.2.4	Knotenzusammenhang und Kantenzusammenhang . . . . .	94
6.3	Trennende Knotenmengen . . . . .	95
6.3.1	Anwendung zur Berechnung der Unabhängigkeitszahl . . . . .	95
6.3.2	Ein Berechnungsbeispiel . . . . .	96

6.3.3	Die Berechnung des chromatischen Polynoms . . . . .	97
6.4	Partielle $k$ -Bäume . . . . .	99
6.4.1	$k$ -Bäume . . . . .	99
6.4.2	Partielle $k$ -Bäume . . . . .	100
6.4.3	Serien-Parallel-Graphen . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Bäume</b> . . . . .	<b>104</b>
7.1	Eigenschaften von Bäumen . . . . .	104
7.1.1	Die Anzahl der Bäume . . . . .	105
7.1.2	Der Prüfercode und der Satz von Cayley . . . . .	106
7.1.3	Isomorphieklassen von Bäumen . . . . .	108
7.2	Wurzelbäume . . . . .	108
7.3	Binäre Bäume . . . . .	111
<b>8</b>	<b>Kreise</b> . . . . .	<b>115</b>
8.1	Kreise in Graphen . . . . .	115
8.1.1	Taille und Umfang . . . . .	116
8.1.2	Basiskreise . . . . .	117
8.2	Hamiltonkreise . . . . .	118
8.3	Eulerkreise . . . . .	121
<b>9</b>	<b>Gerichtete Graphen</b> . . . . .	<b>125</b>
9.1	Definitionen und Eigenschaften gerichteter Graphen . . . . .	125
9.1.1	Wege und Erreichbarkeit . . . . .	126
9.1.2	Zusammenhang und starker Zusammenhang . . . . .	126
9.1.3	Orientierungen . . . . .	127
9.1.4	Innen- und Außengrad . . . . .	128
9.1.5	Quellen und Senken . . . . .	129
9.1.6	Vektorräume . . . . .	130
9.1.7	Kozyklen . . . . .	131
9.1.8	Zyklen- und Kozyklenräume . . . . .	132
9.2	Turniere . . . . .	136
9.3	Flüsse in Graphen . . . . .	139
	<b>Lösungen</b> . . . . .	<b>144</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	<b>156</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	<b>158</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>159</b>