

---

# Numerische Mathematik

---

Von  
Martin Hermann

---

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

---

Oldenbourg Verlag München Wien

---

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage	V
Vorwort zur zweiten Auflage	VII
<b>1 Wichtige Phänomene des numerischen Rechnens</b>	<b>1</b>
1.1 Numerische Algorithmen und Fehler . . . . .	1
1.2 Fehlerfortpflanzung, Kondition und numerische Instabilität . . . . .	7
1.3 Rundungsfehler bei Gleitpunkt-Arithmetik . . . . .	17
1.4 Aufgaben . . . . .	28
<b>2 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>35</b>
2.1 Auflösung gestaffelter Systeme . . . . .	35
2.2 <i>LU</i> -Faktorisierung und Gauß-Elimination . . . . .	39
2.3 Pivot-Strategien und Nachiteration . . . . .	45
2.4 Systeme mit speziellen Eigenschaften . . . . .	61
2.4.1 Positiv definite Systeme . . . . .	61
2.4.2 Tridiagonale Gleichungssysteme . . . . .	66
2.4.3 Die Formel von Sherman und Morrison . . . . .	71
2.5 Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen . . . . .	75
2.5.1 Normen . . . . .	75
2.5.2 Singulärwertzerlegung, SVD . . . . .	80
2.5.3 Fehlerabschätzungen, Kondition . . . . .	86
2.5.4 Rundungsfehleranalyse der Gauß-Elimination . . . . .	92
2.6 Iterative Verfahren . . . . .	101
2.6.1 Konvergenz der Nachiteration . . . . .	101
2.6.2 Spektralradius und Konvergenz einer Matrix . . . . .	103
2.6.3 Spezielle Iterationsverfahren . . . . .	105
2.6.4 Ausblick: Entwicklung neuer Iterationsverfahren . . . . .	116
2.7 Aufgaben . . . . .	126

<b>3</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>135</b>
3.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	135
3.1.1	Stetigkeitsaussagen . . . . .	137
3.1.2	Eigenschaften symmetrischer Matrizen . . . . .	140
3.1.3	Gerschgorin Kreise . . . . .	141
3.2	Nichtsymmetrisches Eigenwertproblem: die Potenzmethode . . . . .	145
3.2.1	Das Grundverfahren . . . . .	145
3.2.2	Inverse Potenzmethode . . . . .	150
3.2.3	Deflationstechniken . . . . .	152
3.3	Symmetrisches Eigenwertproblem: <i>QR</i> -Methode . . . . .	154
3.3.1	Transformationsmatrizen: Givens-Rotationen . . . . .	155
3.3.2	Transformationsmatrizen: Householder-Reflexionen . . . . .	159
3.3.3	Transformationsmatrizen: Schnelle Givens-Transformationen . . . . .	161
3.3.4	<i>QR</i> -Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme . . . . .	166
3.4	Aufgaben . . . . .	171
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen</b>	<b>177</b>
4.1	Problemstellung . . . . .	177
4.2	Fixpunkt-Iteration . . . . .	181
4.3	Newton-Verfahren . . . . .	186
4.4	Das Verfahren von Müller . . . . .	194
4.5	Intervall-Verfahren . . . . .	197
4.6	Fehleranalyse der Iterationsverfahren . . . . .	200
4.7	Techniken zur Konvergenzbeschleunigung . . . . .	208
4.8	Globalisierung lokal konvergenter Verfahren . . . . .	214
4.8.1	Dämpfungsstrategien . . . . .	214
4.8.2	Homotopieverfahren . . . . .	217
4.9	Nullstellen reeller Polynome . . . . .	220
4.9.1	Anwendung des Newton-Verfahrens . . . . .	220
4.9.2	Das QD-Verfahren . . . . .	232
4.10	Aufgaben . . . . .	239
<b>5</b>	<b>Nichtlineare Gleichungen in mehreren Variablen</b>	<b>247</b>
5.1	Fixpunkte von Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	247
5.2	Newton-Verfahren . . . . .	250
5.3	Quasi-Newton-Verfahren . . . . .	256
5.4	Das Verfahren von Brown . . . . .	262
5.5	Deflationstechniken . . . . .	268
5.6	Zur Kondition nichtlinearer Gleichungen . . . . .	273
5.7	Aufgaben . . . . .	275

<b>6</b>	<b>Interpolation und Polynom-Approximation</b>	<b>281</b>
6.1	Taylor-Polynome . . . . .	282
6.2	Interpolation und Lagrange-Polynome . . . . .	286
6.3	Iterierte Interpolation . . . . .	293
6.4	Dividierte Differenzen . . . . .	299
6.5	Hermite-Interpolation . . . . .	310
6.6	Kubische Spline-Interpolation . . . . .	319
6.7	Trigonometrische Interpolation, DFT und FFT . . . . .	331
6.8	Aufgaben . . . . .	346
<b>7</b>	<b>Ausgleichsprobleme, Methode der Kleinsten Quadrate</b>	<b>351</b>
7.1	Diskrete Kleinste-Quadrate Approximation . . . . .	351
7.1.1	Polynomapproximationen . . . . .	351
7.1.2	Empirische Funktionen . . . . .	358
7.1.3	Nichtlineare Approximation . . . . .	365
7.2	Stetige Kleinste-Quadrate-Approximation . . . . .	369
7.2.1	Polynomapproximation . . . . .	369
7.2.2	Approximation mit verallgemeinerten Polynomen . . . . .	373
7.2.3	Harmonische Analyse . . . . .	375
7.2.4	Konstruktion von Orthogonalsystemen . . . . .	378
7.3	Aufgaben . . . . .	389
<b>8</b>	<b>Numerische Differentiation und Integration</b>	<b>395</b>
8.1	Numerische Differentiation . . . . .	396
8.1.1	Beliebige Stützstellenverteilung . . . . .	396
8.1.2	Äquidistante Stützstellenverteilung . . . . .	402
8.1.3	Numerische Differentiation mit gestörten Daten . . . . .	404
8.1.4	Differentiationsformeln ohne Differenzen . . . . .	406
8.1.5	Extrapolation nach Richardson . . . . .	412
8.2	Numerische Integration . . . . .	416
8.2.1	Grundformeln zur Integration . . . . .	417
8.2.2	Zusammengesetzte Quadraturformeln . . . . .	427
8.2.3	Adaptive Techniken . . . . .	433
8.2.4	Romberg-Integration . . . . .	436
8.2.5	Gaußsche Quadraturformeln . . . . .	442
8.3	Aufgaben . . . . .	449
<b>9</b>	<b>Kleinste-Quadrate-Lösungen</b>	<b>455</b>
9.1	Einführung . . . . .	455
9.2	Eigenschaften der $QR$ -Faktorisierung . . . . .	457
9.3	Gram-Schmidt-Verfahren . . . . .	459

---

9.4	Kleinste Quadrate Probleme . . . . .	463
9.5	Methode der Normalgleichungen . . . . .	469
9.6	LS-Lösung mittels <i>QR</i> -Faktorisierung . . . . .	474
9.7	LS-Lösung mittels MGS . . . . .	477
9.8	Schnelle Givens LS-Löser . . . . .	480
9.9	Das LS-Problem für eine Matrix mit Rangabfall . . . . .	482
9.10	Aufgaben . . . . .	490
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>495</b>
<b>Liste der verwendeten Symbole</b>		<b>505</b>
<b>Verzeichnis der Algorithmen</b>		<b>507</b>
<b>Verzeichnis der Matlab-Programme</b>		<b>509</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>		<b>511</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>		<b>513</b>
<b>Index</b>		<b>515</b>