

WAHRSCHEINLICHKEITS- THEORIE

VON

DR. HANS RICHTER

O. PROFESSOR FÜR MATHEMATISCHE STATISTIK UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ZWEITE NEUBEARBEITETE AUFLAGE

MIT 14 TEXTABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

1966

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Maßtheoretische Grundlagen		Seite
§ 1. Die Mengenalgebra		2
§ 2. Mengenkörper		9
a) Allgemeine Definitionen		9
b) Ein Beispiel im R^n		11
c) Das direkte Produkt von Mengenkörpern		13
§ 3. Punkt- und Mengenfunktionen		17
a) Der allgemeine Fall		17
b) Der Spezialfall des geometrischen Inhalts		23
§ 4. Konstruktion eines Maßes aus einem Inhalt		26
§ 5. Intervallmaße im R^n		33
a) Verteilungsfunktionen		34
b) Maßdefinierende Funktionen		41
Kapitel II. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff		
§ 1. Die intuitive Wahrscheinlichkeit		44
§ 2. Die naturwissenschaftliche Wahrscheinlichkeit		47
§ 3. Die Häufigkeitsinterpretation und die Normierungsforderung		54
§ 4. Der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff		58
Kapitel III. Die Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie		
§ 1. Die Grundbegriffe		60
a) Die Axiome des naturwissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffs		66
b) Verallgemeinerung des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit		74
§ 2. Die Grundtheoreme im Fall der LAPLACE-Experimente		77
§ 3. Die allgemeine Gültigkeit der Grundtheoreme		83
§ 4. Einige einfache Folgerungen aus den beiden Grundtheoremen		98
a) Folgerungen aus dem Additionssatz		98
b) Folgerungen aus dem Multiplikationssatz		103
§ 5. Behandlung einiger Aufgaben		114
§ 6. Relaisexperimente und BAYESSches Theorem		127
a) Das Relaisexperiment		127
b) Das Umkehrproblem		130
§ 7. Zufällige Größen		136
a) Die zufällige Größe und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung		136
b) Der Erwartungswert und die erzeugende Funktion		145
§ 8. Der Übergang zur abstrakten Wahrscheinlichkeitstheorie		150
Kapitel IV. Elemente der Integrationstheorie		
§ 1. μ -meßbare Funktionen		159
a) Definition		159
b) Überpflanzung auf andere Mengen		159
c) Konvergenzbegriffe		165

	Seite
§ 2. μ -integrable Funktionen	171
a) Die allgemeine Theorie	171
b) LEBESGUE-STIELTJES-Integrale.	182
§ 3. Quadratintegrierbarkeit	186
§ 4. Maßprodukte.	195
a) Das Produktmaß auf endlichen Mengenprodukten	195
b) Das Produktmaß auf unendlichen Mengenprodukten	202
c) Der Satz von KOLMOGOROFF	207

Kapitel V. Zufällige Größen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsfeldern

§ 1. Idealisierte Experimente und Vergrößerungen	210
§ 2. Wahrscheinlichkeitsdichten	222
a) Allgemeines	222
b) Transformation von Wahrscheinlichkeitsdichten	226
§ 3. Unabhängige zufällige Größen	234
a) Der abstrakte Unabhängigkeitsbegriff.	234
b) Die Faltung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	237
§ 4. Erwartungswerte, Momente, Varianzen	241
a) Der Erwartungswert	241
b) Die Momente einer zufälligen Größe	243
c) Die Momente bei mehreren zufälligen Größen	255
§ 5. Bedingte Erwartungswerte und Verteilungen	271
a) Bedingte Erwartungswerte	271
b) Bedingte Verteilungsfunktionen	279
c) Iterierte Erwartungswerte	286
d) Allgemeine Faltungsformel und BAYESSches Theorem für Dichten	294
§ 6. Charakteristische Funktionen zufälliger Größen.	297
a) Definition und einfache Eigenschaften	297
b) Einige Beispiele	305
c) Weitere Eigenschaften	311
d) Umkehrformeln	317
§ 7. Die Konvergenz von Verteilungsfunktionen	330
a) Die v -Konvergenz	330
b) Beschreibung der charakteristischen Funktionen durch ihre funktionellen Eigenschaften	338

Kapitel VI. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

§ 1. Die Γ -Funktion und die Γ -Verteilungen	342
§ 2. Die Multinomialverteilungen	350
a) Die Binomialverteilung und die POISSON-Verteilung.	350
b) Die Polynomialverteilung	357
§ 3. Die GAUSS-Verteilung	364
a) Der eindimensionale Fall	364
b) Der n -dimensionale Fall.	367
c) Charakterisierung der Normalverteilung durch innere Eigenschaften	371
§ 4. Einige mit der Normalverteilung zusammenhängende Verteilungen	377
a) Die χ^2 -Verteilung.	377
b) Die t -Verteilung	378
c) Die F -Verteilung	381
d) Die T^2 -Verteilung	383

Kapitel VII. Die Konvergenz zufälliger Größen		Seite
§ 1. Definitionen und allgemeine Sätze		387
a) Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Konvergenzbegriffe		387
b) Die Konvergenz des Erwartungswertes		394
c) BAIRESche Eigenschaften		396
d) Null-Eins-Gesetze		399
§ 2. Grenzwertsätze für BERNOULLI-Experimente		403
§ 3. Allgemeine Konvergenzkriterien		412
a) Das Prinzip der äquivalenten Folgen		412
b) Kriterien für das schwache Gesetz der großen Zahlen		414
c) Kriterien für starke Konvergenz		418
§ 4. Der zentrale Grenzwertsatz		423
Lösungen der Aufgaben		439
Literaturverzeichnis		457
Namen- und Sachverzeichnis		459

Zur Technik der Numerierung

Innerhalb der einzelnen Paragraphen sind Formeln, Definitionen und Sätze ohne Rücksicht auf ihren Charakter fortlaufend numeriert; wichtigere Definitionen sind dabei durch Vorsetzung des Symbols „Def.“ kenntlich gemacht. Auf diese Weise hoffe ich, das Auffinden bei Hinweisen erleichtert zu haben.

Daneben wird in Beweisen und Gedankengängen die Kennzeichnung von Einzelaussagen durch (*), (a), (α) oder ähnliches verwendet, was jeweils nur lokal gültig ist.

Die Kapitel werden im Text mit römischen Zahlen zitiert. Im übrigen geschehen Verweisungen gemäß den folgenden Beispielen:

§ 5 ist der Paragraph 5 im gleichen Kapitel; dagegen ist § III, 5 der Paragraph 5 von Kap. III, wenn von einem anderen Kapitel aus zitiert wird.

(3.21) ist Formel 21 von § 3 im gleichen Kapitel; dagegen (VI. 3.21) die Formel (3.21) in Kap. VI.

Analog bedeutet A 7.2 die Aufgabe 2 am Ende des § 7 desselben Kapitels, während bei Verweisungen aus anderen Kapiteln die Kapitelnummer hinzugesetzt wird wie z. B. A V. 7.2.