

Einführung in die Funktionentheorie

von

ROLF NEVANLINNA

Mitglied der Akademie Finnlands, Honorarprofessor der Universität Zürich

und

V. PAATERO

Professor an der Universität Helsinki



1965

**BIRKHÄUSER VERLAG BASEL
UND STUTTGART**

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Kapitel 1: Der Begriff der analytischen Funktion</i>	11
§ 1 Die komplexen Zahlen	11
§ 2 Punktmengen der komplexen Ebene	18
§ 3 Funktionen einer komplexen Veränderlichen	20
Aufgaben zu Kapitel 1	29
 <i>Kapitel 2: Allgemeine Eigenschaften rationaler Funktionen</i>	 34
§ 1 Die Potenz	34
§ 2 Polynome	40
§ 3 Rationale Funktionen	42
Aufgaben zu Kapitel 2	47
 <i>Kapitel 3: Lineare Transformationen</i>	 49
§ 1 Grundeigenschaften linearer Transformationen	49
§ 2 Abbildungsaufgaben	58
§ 3 Stereographische Projektion	66
Aufgaben zu Kapitel 3	69
 <i>Kapitel 4: Die Abbildung durch rationale Funktionen zweiter Ordnung</i>	 74
Aufgaben zu Kapitel 4	78
 <i>Kapitel 5: Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion. Die allgemeine Potenz</i>	 79
§ 1 Definition und Grundeigenschaften der Exponentialfunktion	79
§ 2 Abbildung durch die Exponentialfunktion. Der Logarithmus	84
§ 3 Die allgemeine Potenz	88
Aufgaben zu Kapitel 5	89
 <i>Kapitel 6: Trigonometrische Funktionen</i>	 93
§ 1 Definition und Eigenschaften von Sinus und Kosinus	93
§ 2 Die Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{cot} z$	97
§ 3 Die Abbildung durch die Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{cot} z$. Ihre Umkehrfunktionen	100
§ 4 Die von den Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ vermittelten Abbildungen. Die Funktionen $\operatorname{arc} \sin z$ und $\operatorname{arc} \cos z$	102
§ 5 Übersicht der Riemannschen Flächen der Elementarfunktionen	107
Aufgaben zu Kapitel 6	109

<i>Kapitel 7: Reihen mit komplexen Gliedern</i>	111
§ 1 Allgemeine Sätze	111
§ 2 Potenzreihen	116
Aufgaben zu Kapitel 7	122
 <i>Kapitel 8: Integration im Komplexen. Der Cauchysche Integralsatz</i>	 124
§ 1 Kurvenintegrale	124
§ 2 Die Integralfunktion	131
§ 3 Der Cauchysche Integralsatz	134
§ 4 Allgemeine Fassung des Cauchyschen Integralsatzes	138
Aufgaben zu Kapitel 8	145
 <i>Kapitel 9: Die Cauchysche Integralformel und ihre Anwendung</i>	 150
§ 1 Die Formel von Cauchy	150
§ 2 Die Taylor-Entwicklung einer analytischen Funktion	154
§ 3 Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel	158
§ 4 Die Laurent-Entwicklung	166
§ 5 Isolierte Singularitäten einer analytischen Funktion	170
§ 6 Die Umkehrfunktion einer analytischen Funktion	176
§ 7 Die durch eine rationale Funktion vermittelte Abbildung	184
Aufgaben zu Kapitel 9	187
 <i>Kapitel 10: Der Residuensatz und seine Anwendungen</i>	 190
§ 1 Der Residuensatz	190
§ 2 Anwendung des Residuensatzes zur Berechnung bestimmter Integrale	192
§ 3 Die Partialbruchentwicklung der Funktion $\cot \pi z$	197
§ 4 Das Argumentprinzip	199
§ 5 Anwendungen des Argumentprinzips	201
Aufgaben zu Kapitel 10	205
 <i>Kapitel 11: Harmonische Funktionen</i>	 209
§ 1 Vorbereitende Betrachtungen	209
§ 2 Der Gaußsche Mittelwertsatz. Das Prinzip vom Maximum und Minimum	217
§ 3 Die Poissonsche Formel	221
§ 4 Das harmonische Maß	224
§ 5 Das Dirichletsche Problem	232
§ 6 Das Harnacksche Prinzip	234
Aufgaben zu Kapitel 11	236
 <i>Kapitel 12: Analytische Fortsetzung</i>	 242
§ 1 Prinzip der analytischen Fortsetzung	242
§ 2 Der Monodromiesatz	245
§ 3. Die Umkehrfunktion einer rationalen Funktion	247
§ 4 Harmonische Fortsetzung. Spiegelungsprinzip	248
Aufgaben zu Kapitel 12	253

<i>Kapitel 13: Ganze Funktionen</i>	255
§ 1 Unendliche Produkte	255
§ 2 Produktdarstellung der Funktion $w = \sin \pi z$	258
§ 3 Die Weierstraßsche Produktdarstellung	261
§ 4 Die Formel von Jensen. Das Wachstum einer ganzen Funktion	266
Aufgaben zu Kapitel 13	269
 <i>Kapitel 14: Periodische Funktionen</i>	 272
§ 1 Definition der einfach- und doppelperiodischen Funktionen	272
§ 2 Zurückführung der einfachperiodischen Funktionen auf die Exponentialfunktion	274
§ 3 Grundeigenschaften doppelperiodischer Funktionen	276
§ 4 Die Weierstraßsche p -Funktion	280
§ 5 Die Weierstraßschen ζ - und σ -Funktionen	287
§ 6 Darstellung der doppelperiodischen Funktionen durch die σ -Funktion	291
§ 7 Die Differentialgleichung der Funktion $p(z)$	292
§ 8 Darstellung doppelperiodischer Funktionen als rationale Funktionen von p und p'	294
§ 9 Additionstheorem der doppelperiodischen Funktionen	296
§ 10 Bestimmung einer doppelperiodischen Funktion bei bekannten Hauptteilen	299
§ 11 Abbildung durch eine doppelperiodische Funktion 2. Ordnung	300
§ 12 Elliptische Integrale	305
Aufgaben zu Kapitel 14	309
 <i>Kapitel 15: Die Eulersche Γ-Funktion</i>	 312
§ 1 Definition der Γ -Funktion	312
§ 2 Die Stirlingsche Formel	315
§ 3 Produktdarstellung der Γ -Funktion	320
Aufgaben zu Kapitel 15	322
 <i>Kapitel 16: Die Riemannsche ζ-Funktion</i>	 324
§ 1 Definition und Eulersche Produktdarstellung	324
§ 2 Integraldarstellung der ζ -Funktion	326
§ 3 Analytische Fortsetzung der ζ -Funktion	328
§ 4 Die Riemannsche Funktionalgleichung	330
§ 5 Nullstellen der ζ -Funktion und Verteilung der Primzahlen	335
Aufgaben zu Kapitel 16	341
 <i>Kapitel 17: Theorie der konformen Abbildung</i>	 343
§ 1 Der Riemannsche Abbildungssatz	343
§ 2 Konstruktion der Lösung	346
§ 3 Ränderzuordnung bei konformer Abbildung	354
§ 4 Zusammenhang zwischen konformer Abbildung und Dirichlet-Problem	363
§ 5 Konforme Abbildung von Polygonen	367
§ 6 Dreiecksfunktionen	375
§ 7 Der Picardsche Satz	377
Aufgaben zu Kapitel 17	380
 <i>Sachverzeichnis</i>	 384