

Wolfgang Lück

Algebraische Topologie

Homologie und Mannigfaltigkeiten



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	V
Inhaltsverzeichnis	VI
1 Homologie	1
1.1 Die Axiome einer Homologietheorie	1
1.2 Folgerungen aus den Axiomen	3
1.3 Elementare Berechnungen	10
1.4 Elementare Anwendungen	14
1.5 Aufgaben	17
2 Singuläre Homologie	19
2.1 Kettenkomplexe	19
2.2 Konstruktion der singulären Homologie	21
2.3 Beweis der Homotopieinvarianz für singuläre Homologie	24
2.4 Beweis der Ausschneidung für singuläre Homologie	27
2.5 Skizze der Konstruktion von Bordismustheorie	30
2.6 Die erste singuläre Homologie und die Fundamentalgruppe	32
2.7 Aufgaben	34
3 CW-Komplexe	35
3.1 CW-Komplexe	35
3.2 Abbildungen zwischen Sphären und ihre Abbildungsgrade	43
3.3 Der zelluläre Kettenkomplex assoziiert zu einer Homologietheorie	45
3.4 Homologische Berechnungen mit Hilfe des zellulären Kettenkomplexes	50
3.5 Eindeutigkeit der Homologie für CW-Komplexe	56
3.6 Simpliciale Komplexe und simpliciale Homologie	61
3.7 Aufgaben	64
4 Euler-Charakteristik und Lefschetz-Zahlen	66
4.1 Euler-Charakteristik für endliche Kettenkomplexe	66
4.2 Euler-Charakteristik für endliche CW-Komplexe	68
4.3 Die universelle Eigenschaft der Euler-Charakteristik	70
4.4 Lefschetz-Zahlen für endliche Kettenkomplexe	71
4.5 Lefschetz-Zahlen für endliche CW-Komplexe	74
4.6 Lefschetz-Zahlen und Euler-Charakteristiken auf Mannigfaltigkeiten	76
4.7 Aufgaben	77
5 Kohomologie	78
5.1 Die Axiome einer Kohomologietheorie	78
5.2 Singuläre und zelluläre Kohomologie	81
5.3 Die Axiome einer multiplikativen Struktur	83
5.4 Der Kohomologiering projektiver Räume	86
5.5 Das Cup-Produkt für CW-Komplexe	91

5.6	Aufgaben	93
6	Homologische Algebra	95
6.1	Der Fundamentalsatz der homologischen Algebra	95
6.2	Der Tor-Funktor	96
6.3	Der Ext-Funktor	102
6.4	Das universelle Koeffiziententheorem für Homologie	105
6.5	Das universelle Koeffiziententheorem für Kohomologie	107
6.6	Die Künneth-Formel für Homologie	109
6.7	Der Satz von Eilenberg und Zilber	110
6.8	Die Künneth-Formel für Kohomologie	111
6.9	Die Bockstein-Sequenz	112
6.10	Direkte Systeme und direkte Limiten	113
6.11	Inverse Systeme und inverse Limiten	115
6.12	Homologie und Ausschöpfungen	118
6.13	Kohomologie und Ausschöpfungen	119
6.14	Aufgaben	121
7	Produkte	123
7.1	Liste der verschiedenen Produkte	123
7.2	Natürlichkeit	124
7.3	Assoziativität	124
7.4	Kommutativität	124
7.5	Eins-Elemente	124
7.6	Verträglichkeit mit Randoperatoren	125
7.7	Relationen zwischen den Produkten	125
7.8	Konstruktion der Produkte	126
7.9	Die Hopf-Invariante	127
7.10	Der Satz von Borsuk-Ulam	130
7.11	Aufgaben	131
8	Dualität	132
8.1	Orientierung	132
8.2	Der Abbildungsgrad	139
8.3	Kohomologie mit kompaktem Träger	142
8.4	Poincaré-Dualität	144
8.5	Poincaré-Dualität und die Euler-Charakteristik	150
8.6	Schnittformen	151
8.7	Jordanscher Trennungssatz	154
8.8	Aufgaben	156
9	Glatte Mannigfaltigkeiten und ihre Tangentialbündel	158
9.1	Glatte Strukturen	158
9.2	Der Tangentialraum	163
9.3	Vektorraum-bündel	170
9.4	Das Tangentialbündel	174
9.5	Aufgaben	175

10	Elementare Lineare Algebra	177
10.1	Konstruktionen von Vektorräumen	177
10.2	Das Dach-Produkt von alternierenden Multilinearformen	180
10.3	Kanonische Isomorphismen	182
10.4	Determinante und Spur	184
10.5	Skalarprodukte und Orientierungen	185
10.6	Spezielle Basen	186
10.7	Aufgaben	187
11	Parametrisierte Lineare Algebra	190
11.1	Konstruktionen von Vektorraumbündeln	190
11.2	Riemannsche Metriken und Orientierungen	193
11.3	Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten	196
11.4	Aufgaben	201
12	Differentialformen	202
12.1	Definition einer Differentialform	202
12.2	Das Dach-Produkt von Differentialformen	202
12.3	Die äußere Ableitung	203
12.4	Integration von Differentialformen	208
12.5	Die Volumenform	212
12.6	Aufgaben	213
13	Der Satz von Stokes	215
13.1	Mannigfaltigkeiten mit Rand	215
13.2	Der Satz von Stokes	219
13.3	Anwendungen des Satzes von Stokes	222
13.4	Aufgaben	227
14	De Rham-Kohomologie	228
14.1	Definition der de Rham-Kohomologie	228
14.2	Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie	228
14.3	Die Mayer-Vietoris-Sequenz für die de Rham-Kohomologie	232
14.4	Die multiplikative Struktur auf der de Rham-Kohomologie	234
14.5	Aufgaben	234
15	Der Satz von de Rham	236
15.1	Glatte singuläre Koketten	236
15.2	Glatte Kohomologietheorien	237
15.3	Die de Rham-Abbildung	240
15.4	Der Beweis des Satzes von de Rham	241
15.5	Verträglichkeit mit den multiplikativen Strukturen	241
15.6	Der Satz von Hodge-de Rham	241
15.7	Aufgaben	243

16 Anhang	244
16.1 Topologische Räume	244
16.2 Die Teilraumtopologie	245
16.3 Stetige Abbildungen	245
16.4 Kompaktheit	245
16.5 Zusammenhang	246
16.6 Das 2. Abzählbarkeitsaxiom	246
16.7 Die Summe von topologischen Räumen	246
16.8 Das Produkt von topologischen Räumen	247
16.9 Homotopie	247
16.10 Identifizierungen	249
16.11 Kategorien	249
16.12 Funktoren und Transformationen	251
16.13 Aufgaben	252
Literaturverzeichnis	254
Index	257
Notation	265