

Hans-Rudolf Schwarz, Norbert Köckler

Numerische Mathematik

5., überarbeitete Auflage



Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Inhalt

Einleitung	13
1 Fehlertheorie	15
1.1 Fehlerarten	15
1.2 Zahldarstellung	16
1.3 Rundungsfehler	17
1.4 Differenzielle Fehleranalyse	20
1.5 Ergänzungen und Beispiele	23
1.5.1 Rückwärts-Fehleranalyse (backward analysis)	23
1.5.2 Numerische Stabilität	24
1.6 Software	27
2 Lineare Gleichungssysteme, direkte Methoden	28
2.1 Der Gauß-Algorithmus	28
2.1.1 Elimination, Dreieckszerlegung und Determinantenberechnung	28
2.1.2 Pivotstrategien	36
2.1.3 Ergänzungen	41
2.2 Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen	45
2.2.1 Normen	45
2.2.2 Fehlerabschätzungen, Kondition	50
2.3 Systeme mit speziellen Eigenschaften	54
2.3.1 Symmetrische, positiv definite Systeme	54
2.3.2 Bandgleichungen	60
2.3.3 Tridiagonale Gleichungssysteme	62
2.4 Verfahren für Vektorrechner und Parallelrechner	65
2.4.1 Voll besetzte Systeme	66
2.4.2 Tridiagonale Gleichungssysteme	70
2.5 Anwendungen	80
2.5.1 Schaltkreistheorie	80
2.5.2 Fluss durch ein Rohrnetz mit Pumpe	82
2.5.3 Ebenes Fachwerk	83

2.6	Software	85
2.7	Aufgaben	85
3	Interpolation und Approximation	89
3.1	Polynominterpolation	90
3.1.1	Problemstellung	90
3.1.2	Lagrange-Interpolation	93
3.1.3	Newton-Interpolation	93
3.1.4	Hermite-Interpolation	96
3.1.5	Inverse Interpolation	98
3.1.6	Anwendung: Numerische Differenziation	99
3.2	Splines	104
3.2.1	Kubische Splines	105
3.2.2	B-Splines 1. Grades	110
3.2.3	Kubische B-Splines	112
3.3	Zweidimensionale Splineverfahren	117
3.3.1	Bilineare Tensorsplines	118
3.3.2	Bikubische Tensorsplines	121
3.4	Kurveninterpolation	123
3.4.1	Problemstellung	123
3.4.2	Numerische Lösung mit Splines	124
3.5	Kurven und Flächen mit Bézier-Polynomen	125
3.5.1	Bernstein-Polynome	125
3.5.2	Bézier-Darstellung eines Polynoms	127
3.5.3	Der Casteljau-Algorithmus	128
3.5.4	Bézier-Kurven	129
3.5.5	Bézier-Flächen	135
3.6	Gauß-Approximation	138
3.6.1	Diskrete Gauß-Approximation	140
3.6.2	Kontinuierliche Gauß-Approximation	142
3.7	Trigonometrische Approximation	143
3.7.1	Fourier-Reihen	143
3.7.2	Effiziente Berechnung der Fourier-Koeffizienten	152
3.8	Orthogonale Polynome	159
3.8.1	Approximation mit Tschebyscheff-Polynomen	160
3.8.2	Interpolation mit Tschebyscheff-Polynomen	168
3.8.3	Die Legendre-Polynome	172
3.9	Software	177
3.10	Aufgaben	178

4	Nichtlineare Gleichungen	181
4.1	Theoretische Grundlagen	181
4.1.1	Problemstellung	181
4.1.2	Konvergenztheorie und Banachscher Fixpunktsatz	182
4.1.3	Stabilität und Kondition	186
4.2	Gleichungen in einer Unbekannten	187
4.2.1	Das Verfahren der Bisektion	187
4.2.2	Das Verfahren von Newton	189
4.2.3	Die Sekantenmethode	192
4.2.4	Brents Black-box-Methode	193
4.2.5	Verfahrensvergleich	195
4.3	Gleichungen in mehreren Unbekannten	196
4.3.1	Fixpunktiteration und Konvergenz	196
4.3.2	Das Verfahren von Newton	197
4.4	Nullstellen von Polynomen	204
4.4.1	Reelle Nullstellen: Das Verfahren von Newton-Maehly	204
4.4.2	Komplexe Nullstellen: Das Verfahren von Bairstow	208
4.5	Software	212
4.6	Aufgaben	212
5	Eigenwertprobleme	215
5.1	Theoretische Grundlagen	216
5.1.1	Das charakteristische Polynom	216
5.1.2	Ähnlichkeitstransformationen	216
5.1.3	Symmetrische Eigenwertprobleme	217
5.1.4	Elementare Rotationsmatrizen	217
5.2	Das klassische Jacobi-Verfahren	219
5.3	Die Vektoriteration	226
5.3.1	Die einfache Vektoriteration nach von Mises	226
5.3.2	Die inverse Vektoriteration	228
5.4	Transformationsmethoden	229
5.4.1	Transformation auf Hessenberg-Form	230
5.4.2	Transformation auf tridiagonale Form	234
5.4.3	Schnelle Givens-Transformation	236
5.5	<i>QR</i> -Algorithmus	240
5.5.1	Grundlagen zur <i>QR</i> -Transformation	240
5.5.2	Praktische Durchführung, reelle Eigenwerte	245
5.5.3	<i>QR</i> -Doppelschritt, komplexe Eigenwerte	250
5.5.4	<i>QR</i> -Algorithmus für tridiagonale Matrizen	253
5.5.5	Zur Berechnung der Eigenvektoren	257

5.6	Das allgemeine Eigenwertproblem	258
5.6.1	Der symmetrisch positiv definite Fall	258
5.7	Eigenwertschranken, Kondition, Stabilität	261
5.8	Anwendung	265
5.8.1	Membranschwingungen	265
5.9	Software	267
5.10	Aufgaben	268
6	Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate	271
6.1	Lineare Ausgleichsprobleme, Normalgleichungen	271
6.2	Methoden der Orthogonaltransformation	275
6.2.1	Givens-Transformation	276
6.2.2	Spezielle Rechentechniken	281
6.2.3	Householder-Transformation	283
6.3	Singulärwertzerlegung	289
6.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	293
6.4.1	Gauß-Newton-Methode	294
6.4.2	Minimierungsverfahren	297
6.5	Software	301
6.6	Aufgaben	302
7	Numerische Integration	304
7.1	Newton-Cotes-Formeln	305
7.1.1	Konstruktion von Newton-Cotes-Formeln	305
7.1.2	Verfeinerung der Trapezregel	307
7.2	Romberg-Integration	310
7.3	Transformationsmethoden	312
7.3.1	Periodische Integranden	313
7.3.2	Integrale über \mathbb{R}	315
7.3.3	Variablensubstitution	317
7.4	Gauß-Integration	320
7.4.1	Eingebettete Gauß-Regeln	328
7.5	Adaptive Integration	329
7.6	Mehrdimensionale Integration	333
7.6.1	Produktintegration	333
7.6.2	Integration über Standardgebiete	334
7.7	Software	335
7.8	Aufgaben	336

Inhalt		11
8	Anfangswertprobleme	339
8.1	Einführung	340
8.1.1	Problemklasse und theoretische Grundlagen	340
8.1.2	Möglichkeiten numerischer Lösung	342
8.2	Einschrittverfahren	347
8.2.1	Konsistenz	347
8.2.2	Runge-Kutta-Verfahren	350
8.2.3	Explizite Runge-Kutta-Verfahren	351
8.2.4	Halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren	355
8.2.5	Schrittweitensteuerung	356
8.3	Mehrschrittverfahren	360
8.3.1	Verfahren vom Adams-Typ	360
8.3.2	Konvergenztheorie und Verfahrenskonstruktion	365
8.4	Stabilität	373
8.4.1	Inhärente Instabilität	373
8.4.2	Absolute Stabilität bei Einschrittverfahren	375
8.4.3	Absolute Stabilität bei Mehrschrittverfahren	378
8.4.4	Steife Differenzialgleichungen	381
8.5	Anwendung: Lotka-Volterras Wettbewerbsmodell	385
8.5.1	Kampf um Ressourcen	385
8.5.2	Räuber und Ressourcen	387
8.6	Software	388
8.7	Aufgaben	389
9	Rand- und Eigenwertprobleme	392
9.1	Problemstellung und Beispiele	392
9.2	Lineare Randwertaufgaben	396
9.2.1	Allgemeine Lösung	396
9.2.2	Analytische Methoden	398
9.3	Schießverfahren	405
9.3.1	Das Einfach-Schießverfahren	405
9.3.2	Das Mehrfach-Schießverfahren	410
9.4	Differenzenverfahren	415
9.4.1	Dividierte Differenzen	415
9.4.2	Diskretisierung der Randwertaufgabe	416
9.5	Software	421
9.6	Aufgaben	422
10	Partielle Differenzialgleichungen	424
10.1	Differenzenverfahren	424

10.1.1	Problemstellung	424
10.1.2	Diskretisierung der Aufgabe	426
10.1.3	Randnahe Gitterpunkte, allgemeine Randbedingungen	431
10.1.4	Diskretisierungsfehler	441
10.1.5	Ergänzungen	443
10.2	Parabolische Anfangsrandwertaufgaben	445
10.2.1	Eindimensionale Probleme, explizite Methode	445
10.2.2	Eindimensionale Probleme, implizite Methode	451
10.2.3	Diffusionsgleichung mit variablen Koeffizienten	456
10.2.4	Zweidimensionale Probleme	458
10.3	Methode der finiten Elemente	463
10.3.1	Grundlagen	463
10.3.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente	466
10.3.3	Elementweise Bearbeitung	468
10.3.4	Aufbau und Behandlung der linearen Gleichungen	474
10.3.5	Beispiele	474
10.4	Software	479
10.5	Aufgaben	480
11	Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren	484
11.1	Diskretisierung partieller Differenzialgleichungen	484
11.2	Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	486
11.2.1	Konstruktion der Iterationsverfahren	486
11.2.2	Einige Konvergenzsätze	491
11.2.3	Optimaler Relaxationsfaktor der Überrelaxation	505
11.3	Methode der konjugierten Gradienten	512
11.3.1	Herleitung des Algorithmus	512
11.3.2	Eigenschaften der Methode der konjugierten Gradienten	517
11.3.3	Konvergenzabschätzung	520
11.3.4	Vorkonditionierung	524
11.4	Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen	530
11.4.1	Grundlagen des Verfahrens	530
11.4.2	Algorithmische Beschreibung und Eigenschaften	534
11.5	Speicherung schwach besetzter Matrizen	539
11.6	Software	542
11.7	Aufgaben	542
	Literaturverzeichnis	546
	Sachverzeichnis	559