

MONOGRAPHIES UNIVERSITAIRES DE MATHÉMATIQUES

PHAM MAU QUAN

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

INTRODUCTION  
A  
LA GÉOMÉTRIE  
DES  
VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

PRÉFACE DE

A. LICHNEROWICZ

Membre de l'Institut  
Professeur au Collège de France

**DUNOD**  
PARIS  
1969

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 0. — <b>Rappel de topologie générale et notions sur les catégories</b> .....	1
I. — <i>Espaces topologiques</i> .....	1
1. Espaces topologiques .....	1
2. Applications continues .....	3
3. Homéomorphisme .....	4
4. Sous-espace. Produit topologique .....	5
5. Espaces compacts .....	6
6. Espaces localement compacts .....	8
7. Espace quotient .....	10
8. Connexité .....	11
II. — <i>Catégories</i> .....	14
9. Catégorie .....	14
10. Foncteur .....	10
11. Objet initial, objet final .....	16
<i>Problème</i> .....	17
<i>Bibliographie</i> .....	17
CHAPITRE I. — <b>Variétés différentiables</b> .....	19
I. — <i>Applications différentiables dans <math>\mathbf{R}^n</math></i> .....	19
1. Application différentiable .....	19
2. Le théorème des fonctions inverses .....	21
II. — <i>Définition des variétés différentiables</i> .....	25
3. Faisceau .....	25
4. Définition des variétés différentiables .....	26
5. Invariance de la dimension .....	29
6. Exemples de variétés différentiables .....	30
7. Sous-variété. Variété produit .....	31
III. — <i>Variétés paracompactes. Partition de l'unité</i> .....	32
8. Un lemme .....	32
9. Partition de l'unité .....	33
10. Variétés paracompactes .....	35

IV. — <i>Espaces vectoriels tangents</i> .....	37
11. Germes de fonctions et espaces vectoriels tangents .....	37
12. Vecteur tangent et différentielle .....	38
13. Cas des variétés $C^\infty$ ou $C^\omega$ .....	40
V. — <i>Applications différentiables. Immersion. Submersion</i> .....	41
14. Application différentiable .....	41
15. Différentielle d'une application .....	43
16. Immersion. Submersion .....	45
17. Construction des variétés par image réciproque .....	47
VI. — <i>Produit fibré et variété quotient</i> .....	48
18. Applications transversales .....	48
19. Produit fibré .....	49
20. Variété quotient .....	50
<i>Problèmes</i> .....	53
<i>Bibliographie</i> .....	61
<b>CHAPITRE II. — Tenseurs et formes</b> .....	63
I. — <i>Algèbre tensorielle</i> .....	63
1. Produit tensoriel .....	63
2. Algèbre tensorielle .....	65
3. Algèbre extérieure .....	67
4. Algèbre symétrique .....	69
5. Algèbre tensorielle affine .....	70
II. — <i>Fibrés vectoriels et tenseurs sur une variété différentiable</i> .....	72
6. Variété fibrée vectorielle .....	72
7. Sections .....	74
8. Le fibré tangent $T(X)$ .....	75
9. Tenseur sur une variété différentiable .....	76
III. — <i>Champs de vecteurs et transformations</i> .....	78
10. Groupe à un paramètre de transformations .....	78
11. Cas où $X$ a son support compact .....	80
12. Transformée infinitésimale et crochet de deux champs de vecteurs ..	81
13. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété $C^\infty$ ou $C^\omega$ ..	83

IV. — <i>Formes différentielles</i> .....	84
14. L'algèbre des formes différentielles sur une variété différentiable ..	84
15. Dérivation et antidérivation .....	87
16. Produit intérieur .....	88
17. Transformée infinitésimale .....	91
18. La différentielle extérieure .....	93
19. Le théorème de Poincaré .....	98
V. — <i>Intégration sur les variétés</i> .....	100
20. Orientation des variétés différentiables .....	100
21. Intégration des formes différentielles .....	101
22. La formule de Stokes .....	103
VI. — <i>Systèmes différentiels</i> .....	106
23. Système différentiel. Variétés intégrales .....	106
24. Le théorème de Fröbenius .....	108
25. Deuxième forme du théorème de Fröbenius .....	111
26. Groupe à un paramètre laissant invariant $E$ .....	113
VII. — <i>Lois de dérivation et connexions dans les fibrés vectoriels</i> .....	116
27. Loi de dérivation .....	116
28. Lois de dérivation associées .....	117
29. Formes différentielles à valeurs dans un $A$ -module .....	118
30. Courbure d'une loi de dérivation .....	121
31. Connexion linéaire .....	123
32. Connexion riemannienne .....	126
<i>Problèmes</i> .....	128
<i>Bibliographie</i> .....	138
CHAPITRE III. — <b>Groupes de Lie</b> .....	139
I. — <i>Généralités</i> .....	139
1. Groupes de Lie .....	139
2. Caractérisation des groupes de Lie .....	141
3. Homomorphisme de groupes de Lie .....	143
II. — <i>Algèbre de Lie d'un groupe de Lie</i> .....	145
4. Formes différentielles invariàntes à gauche .....	145
5. Champs de vecteurs invariants à gauche .....	146

6.	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.....	147
7.	Compléments sur les algèbres de Lie.....	150
8.	Différentielle d'un homomorphisme.....	151
9.	Composée directe de deux algèbres de Lie.....	152
III.	— <i>Sous-groupes à un paramètre</i> .....	153
10.	Sous-groupe à un paramètre.....	153
11.	Application exponentielle.....	154
12.	Applications.....	156
IV.	— <i>Détermination d'un groupe de Lie par son algèbre de Lie</i> .....	157
13.	Opérateurs différentiels invariants à gauche.....	157
14.	Expression des opérateurs $D_\alpha$ en coordonnées canoniques.....	158
15.	Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.....	160
16.	Théorème.....	161
17.	Détermination d'un groupe de Lie par son algèbre de Lie.....	162
18.	Quelques formules.....	164
V.	— <i>Sous-groupes de Lie</i> .....	165
19.	Sous-groupes de Lie.....	165
20.	Sous-groupes fermés.....	168
21.	Le groupe linéaire général $GL(n, \mathbf{R})$ .....	170
VI.	— <i>Le groupe linéaire adjoint</i> .....	172
22.	Automorphisme d'un groupe de Lie.....	172
23.	Le groupe linéaire adjoint.....	173
24.	Sous-groupes distingués. Idéaux.....	176
	<i>Problèmes</i> .....	178
	<i>Bibliographie</i> .....	182
	<b>CHAPITRE IV. — Variétés fibrées principales</b> .....	183
I.	— <i>Structure fibrée principale localement triviale</i> .....	183
1.	Groupes de transformations de Lie.....	183
2.	Structure fibrée principale définie par un groupe de Lie.....	184
3.	Fonctions de transition.....	187
4.	Définition d'une variété fibrée principale par recollement.....	188
II.	— <i>Homomorphismes de variétés fibrées principales</i> .....	190
5.	Homomorphismes de variétés fibrées principales.....	190
6.	Variétés fibrées principales triviales et sections.....	191
7.	Réduction du groupe structural.....	194

III. — <i>Variété fibrée de fibre type associée à une variété fibrée principale</i> . . .	195
8. Variétés fibrées associées . . . . .	195
9. Exemples . . . . .	197
10. Sections dans les variétés fibrées associées . . . . .	198
11. Application à la réduction du groupe structural . . . . .	199
IV. — <i>Application à l'étude des espaces homogènes</i> . . . . .	201
12. Espace homogène . . . . .	201
13. Groupes transitifs de transformations de Lie . . . . .	203
14. Exemples . . . . .	206
V. — <i>Formes à valeurs vectorielles</i> . . . . .	207
15. Tenseurs sur une variété . . . . .	207
16. Formes à valeurs vectorielles . . . . .	209
17. Formes différentielles à valeurs dans une algèbre de Lie . . . . .	211
<i>Problèmes</i> . . . . .	213
<i>Bibliographie</i> . . . . .	214
CHAPITRE V. — <b>Connexions sur les variétés fibrées principales</b> . . . . .	215
I. — <i>Champs de vecteurs sur une variété fibrée principale</i> . . . . .	215
1. Champs de vecteurs induits par un groupe de transformation de Lie . . . . .	215
2. Champs de vecteurs verticaux . . . . .	217
3. Champs de vecteurs projetables . . . . .	219
II. — <i>Connexions sur une variété fibrée principale</i> . . . . .	221
4. Définition d'une connexion . . . . .	221
5. La 1-forme de connexion . . . . .	223
6. Théorèmes d'existence . . . . .	225
7. Connexion et sections locales . . . . .	226
8. Champs de vecteurs horizontaux et relèvements . . . . .	228
9. Différentielle absolue . . . . .	230
III. — <i>Courbure d'une connexion</i> . . . . .	231
10. La 2-forme de courbure d'une connexion . . . . .	231
11. Connexions plates . . . . .	233
IV. — <i>Parallélisme et connexion dans les variétés fibrées associées</i> . . . . .	236
12. Relèvement d'un chemin . . . . .	236

13. Déplacement parallèle .....	237
14. Déplacement parallèle et connexion dans les variétés fibrées associées .....	238
V. — <i>Connexions et lois de dérivation dans les fibrées vectorielles</i> .....	241
15. Fibrées vectorielles .....	241
16. Homomorphisme de fibrées vectorielles .....	243
17. Loi de dérivation .....	244
18. Loi de dérivation et connexion .....	245
19. Dérivée covariante .....	247
20. Le théorème réciproque .....	249
21. Différentielle covariante .....	251
VI. — <i>Connexions linéaires</i> .....	253
22. Connexion linéaire sur une variété différentiable .....	253
23. Courbure et torsion d'une connexion linéaire .....	256
24. Loi de dérivation induite .....	258
25. Géodésiques .....	262
26. Connexion affine .....	265
27. Connexion euclidienne et connexion riemannienne .....	267
<i>Problèmes</i> .....	271
<i>Bibliographie</i> .....	273
<i>Index terminologique</i> .....	275