

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Vorwort zur ersten Auflage	vi
Bezeichnungen	xiii

Kapitel I

Einführung

§ 1. Beispiele und Typeneinteilung	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 7 — Sachgemäß gestellte Probleme 8	
§ 2. Maximumprinzip	11
Beispiele 12 — Folgerungen 13	
§ 3. Differenzenverfahren	15
Diskretisierung 15 — Diskretes Maximumprinzip 18	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren	21
Konsistenz 21 — Lokaler und globaler Fehler 21 — Grenzen der Konvergenztheorie 24	

Kapitel II

Konforme Finite Elemente

§ 1. Sobolev-Räume	27
Einführung der Sobolev-Räume 27 — Die Friedrichssche Ungleichung 29 — Singularitäten von H^1 -Funktionen 30 — Kompakte Einbettungen 31	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung	33
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 40	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz	42
Elliptizität in H^1 42 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen 43 — Neumannsche Randbedingungen 44 — Gemischte Randbedingungen 45 — Beweis des Spursatzes 45 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 48	
§ 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente	51
Modellproblem 54	
§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente	57
Forderungen an die Triangulierung 58 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 59 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 61 — Bemerkung zu C^1 -Elementen 62 — Bilineare Elemente 64 — Quadratische	

Viereckelemente 66 — Affine Familien 66 — Zur Auswahl von Elementen 69	
§ 6. Approximationssätze	71
Der Fragenkreis um das Bramble–Hilbert–Lemma 72 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 73 — Bilineare Viereckelemente 77 — Inverse Abschätzungen 78 — Cléments Operator 79 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 80	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung	83
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 83 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 84 — L_2 -Abschätzungen 85 — Eine einfache L_∞ -Abschätzung 87 — Der L_2 -Projektor 88	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen	90
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 90 — Innere Kondensation 92 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 93 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 93 — Teilweise Netzverfeinerungen 93	
<i>Kapitel III</i>	
<i>Nichtkonforme und andere Methoden</i>	
§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation	98
Die Lemmas von Strang 98 — Dualitätstechnik 100 — Das Crouzeix–Raviart–Element 101 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 104 — Modifikationen beim Dualitätsargument 106	
§ 2. Isoparametrische Elemente	109
Isoparametrische Dreieckelemente 109 — Isoparametrische Viereckelemente 111	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel	114
Negative Normen 114 — Adjungierte Operatoren 116 — Ein abstrakter Existenzsatz 116 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 118 — Beweis von Satz 3.4 119	
§ 4. Sattelpunktprobleme	121
Sattelpunkte und Minima 121 — Die inf-sup-Bedingung 122 — Gemischte Finite-Element-Methoden 126 — Die Laplace-Gleichung als gemischtes Problem 128 — Das Raviart–Thomas–Element 130 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 132	
§ 5. Die Stokessche Gleichung	138
Variationsformulierung 139 — Die inf-sup-Bedingung 140 — Bemerkungen zur Brezzi-Bedingung 141 — Fast inkompressible Strömungen 142	
§ 6. Finite Elemente für das Stokes-Problem	143
Ein instabiles Element 143 — Das Taylor–Hood–Element 148 — Das MINI-Element 149 — Das divergenzfreie nichtkonforme P_1 -Element 150	

§ 7. A posteriori Abschätzungen	153
Residuale Schätzer 155 — Untere Abschätzungen 157 — Andere Schätzer 159 — Lokale Gitterverfeinerungen 160	

Kapitel IV

Die Methode der konjugierten Gradienten 161

§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ...	162
Stationäre lineare Prozesse 162 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren 164 — Das Modellproblem 167 — Overrelaxation 167	
§ 2. Gradientenverfahren	171
Das allgemeine Gradientenverfahren 171 — Gradientenverfahren und quadratische Funktionen 172 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit großer Kondition 174	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen	177
Der Algorithmus 179 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Verfahren 181 — Verfahren der konjugierten Residuen 183 — Indefinite und unsymmetrische Matrizen 184	
§ 4. Vorkonditionierung	186
Vorkonditionierung durch SSOR 189 — Vorkonditionierung durch ILU 190 — Bemerkungen zur Parallelisierung 192 — Nichtlineare Probleme 193	
§ 5. Sattelpunktprobleme	196
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 196 — Eine Alternative 198	

Kapitel V

Mehrgitterverfahren 200

§ 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben	201
Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 201 — Die Mehrgitter-Idee 202 — Der Algorithmus 203 — Der Übergang zwischen den Gittern 206	
§ 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren	211
Diskrete Normen 212 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 214 — Approximationseigenschaft 216 — Konvergenzbeweis für das Zweigitterverfahren 217 — Andere Konzepte 218	
§ 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen	221
Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 221 — Die Verschärfung für die Energienorm 222 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 224	
§ 4. Berechnung von Startwerten	229
Bestimmung von Startwerten 229 — Komplexität 231 — Mehrgitterverfahren mit wenigen Ebenen 232 — Der CASCADE-Algorithmus 233	

§ 5. Nichtlineare Probleme	235
Mehrgitter-Newton-Verfahren 236 — Das nichtlineare Mehrgitterverfahren 237 — Startwerte 239	

Kapitel VI

Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper 241

§ 1. Einführung in die Elastizitätstheorie	242
Kinematik 242 — Gleichgewichtsbedingungen 244 — Die Piola-Transformation 246 — Materialgesetze 247 — Lineare Materialgesetze 251	
§ 2. Hyperelastische Materialien	253
§ 3. Lineare Elastizitätstheorie	256
Das Variationsproblem 256 — Die reine Verschiebungsmethode 260 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 262 — Die gemischte Me- thode nach Hu–Washizu 264 — Fast inkompressibles Material 266 — Locking 267 — Locking beim Timoschenko-Balken 269	
§ 4. Scheiben	272
Ebener Spannungszustand 272 — Ebener Verzerrungszustand 273 — Schei- benelemente 273 — Das PEERS-Element 274 — Zur Implementierung 278	
§ 5. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte	280
Die Hypothesen 280 — Bemerkungen zu Balken 283 — Gemischte Methoden für die Kirchhoff-Platte 283 — DKT-Elemente 285	
§ 6. Die Mindlin–Reissner–Platte	292
Die Helmholtz-Zerlegung 293 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zer- legung 295 — MITC-Elemente 296 — Der Ansatz ohne Helmholtz-Zerlegung 300	
Literatur	304
Weitere Literatur zu Finiten Elementen	312
Sachverzeichnis	313