

INHALT

Kapitel I: Multilineare Algebra

§ 1. Multilinearformen 12

Vektorraum $\mathfrak{M}_p X$ der p -Linearformen auf einem reellen Vektorraum X , graduierte Algebra $\mathfrak{M} X = \bigoplus \mathfrak{M}_p X$ der Multilinearformen auf X , Transformationsgesetze, Antisymmetrisierungsoperatoren S_p und S .

§ 2. Alternierende Multilinearformen 17

Vektorraum $A X = \bigoplus A_p X$ der alternierenden Multilinearformen auf X , Graßmannprodukt „ \wedge “ alternierender Multilinearformen, graduierte Graßmannalgebra $\Lambda X = \bigoplus \Lambda_p X$, Transformationsgesetze.

§ 3. Der *-Operator 27

Kanonische Isomorphie von $\Lambda_p(X^*)$ und $(\Lambda_p X)^*$, kanonisch induzierte Skalarprodukte auf $\Lambda_p X$, Einführung von Orientierung und Volumenmaß mittels alternierender Multilinearformen, Definition und Eigenschaften des *-Operators $*: \Lambda_p X \rightarrow \Lambda_{n-p} X$ für einen n -dimensionalen, orientierten reellen Vektorraum X mit Skalarprodukt; Vektorprodukt auf einem 3dimensionalen, orientierten reellen Vektorraum X mit Skalarprodukt; Transformationsgesetze für den *-Operator.

§ 4. Alternierende multilineare Abbildungen 40

Vektorraum $\tilde{\Lambda} X = \bigoplus \tilde{\Lambda}_p X$ der vektorwertigen alternierenden Multilinearformen, Transformationsgesetze, Graßmannprodukte, *-Operator $*: \tilde{\Lambda}_p X \rightarrow \tilde{\Lambda}_{n-p} X$, Vektorprodukt vektorwertiger alternierender Multilinearformen, Beziehungen zwischen den speziellen Formen $d\epsilon \in \tilde{\Lambda}_1 X$, $dF \in \tilde{\Lambda}_{n-1} X$, $dV \in \Lambda_n X$ auf einem n -dimensionalen, orientierten reellen Vektorraum X mit Skalarprodukt.

Kapitel II: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

§ 5. Differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Mengen in Zahlenräumen 51

\mathcal{C}^r -Abbildungen zwischen offenen Mengen in reellen Zahlenräumen und ihre Differentiale, Banachscher Fixpunktsatz, Satz über differenzierbare Umkehrabbildungen, lokale Zerlegungen regulärer \mathcal{C}^r -Abbildungen in \mathcal{C}^r -Diffeomorphismen, lineare Projektionen und \mathcal{C}^r -Einbettungen.

§ 6. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 62

\mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten, Ring $\mathcal{C}^r(M)$ der r mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einer \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeit M , \mathcal{C}^r -Abbildungen zwischen \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten, \mathcal{C}^r -Untermannigfaltigkeiten, eigentliche Einbettungen, berandete Untermannigfaltigkeiten.

§ 7. Partition der Eins 75

Parakompaktheit, differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger, differenzierbare Zerlegungen der Eins zu gegebenen lokal-endlichen Überdeckungen.

§ 8. Vektorraumbündel 81

Vektorbündel über \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeiten, Faserprodukt von Vektorbündeln, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\Gamma(M, B)$ der Schnitte eines Vektorbündels B über M , Bündelhomomorphismen, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\mathcal{L}(M, B)$ der Linearformen auf einem Vektorbündel B über M , kanonische Isomorphie von $\mathcal{L}(M, B)$ und $\{\varphi: \Gamma(M, B) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M); \varphi \text{ linear}\}$, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\mathfrak{A}_p(M, B)$ (bzw. $\Lambda_p(M, B)$) der (alternierenden) p -Linearformen auf einem Vektorbündel B über M , Graßmannprodukt „ \wedge “ alternierender Multilinearformen, graduierte Graßmannalgebra $\Lambda(M, B) = \bigoplus \Lambda_p(M, B)$ der alternierenden Multilinearformen auf einem Vektorbündel B über M , Transformationsgesetze, vektorwertige (alternierende) Multilinearformen auf Vektorbündeln, entsprechende Graßmannprodukte und Transformationsgesetze.

§ 9. Das Tangentialbündel 95

Vektorraum $\mathfrak{D}_x M$ der Tangentialvektoren an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M in $x \in M$, Differential $\mathfrak{D}_x F: \mathfrak{D}_x M \rightarrow \mathfrak{D}_x N$, $x \in M$, einer differenzierbaren Abbildung $F: M \rightarrow N$, Tangentialbündel $\mathfrak{D}M$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , Differential $\mathfrak{D}F: \mathfrak{D}M \rightarrow \mathfrak{D}N$ einer differenzierbaren Abbildung $F: M \rightarrow N$, Funktoreigenschaften, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\Gamma(M, \mathfrak{D}M)$ der Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , kanonische Isomorphie von $\{\varphi: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M); \varphi \text{ } \mathbb{R}$ -Derivation\} und $\Gamma(M, \mathfrak{D}M)$, Lie-Produkt in $\Gamma(M, \mathfrak{D}M)$, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\mathfrak{F}_p(M) = \Lambda_p(M, \mathfrak{D}M)$ der Differentialformen vom Grade p und graduierte Algebra $\mathfrak{F}(M) = \bigoplus \mathfrak{F}_p(M)$ der Differentialformen auf M .

§ 10. Maße und Orientierungen 107

Riemannsche Metrik und differenzierbares (speziell Riemannsches) Volumenmaß auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, Existenzbeweise, Orientierbarkeit und Orientierungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, kanonische Orientierung $\partial \mathcal{C}$ der Randmannigfaltigkeit ∂G einer berandeten Untermannigfaltigkeit G einer orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{O}) .

Kapitel III: Differentialrechnung der Differentialformen

- § 11. Die Garbe der Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit** . . . 120
- Differentialformenfunctor, Garben abelscher Gruppen, Ringe etc.; Garbenhomomorphismen, Träger eines Garbenhomomorphismus, Partition des identischen Garbenhomomorphismus zu gegebener lokal-endlicher Überdeckung, feine Garben, exakte Garbensequenzen, feine Auflösungen, Cohomologiegruppen, Differentialformengarben ${}_M\tilde{\mathcal{F}}_p$ und ${}_M\tilde{\mathcal{F}}$ auf einer Mannigfaltigkeit M .
- § 12. Die äußere Ableitung** 126
- Ableitung von Funktionen, äußere Ableitung von Differentialformen und ihre Rechenregeln, Transformationsgesetze.
- § 13. Das Lemma von Poincaré und die de-Rham-Cohomologie** . . . 133
- Geschlossene und exakte Differentialformen, homotope Abbildungen, Lemma von Poincaré für kontrahierbare Mannigfaltigkeiten, de-Rham-Sequenz und de-Rham-Cohomologie.
- § 14. Der Satz von Frobenius** 139
- Integralkurven eines Vektorfeldes, Frobenius-Kriterium für die Integrabilität von Systemen Pfaffscher Formen, involutive Teilvektorbündel des Tangentialbündels, Anwendung des Satzes von Frobenius auf Systeme partieller Differentialgleichungen.
- § 15. Vektorwertige Differentialformen** 151
- Vektorwertige Differentialformen, Graßmannprodukte, Rechenregeln und Transformationsgesetze, affiner Zusammenhang, speziell Riemannscher Zusammenhang, kovariante Ableitung vektorwertiger Differentialformen, Krümmungstensor und Torsion, flache affine Mannigfaltigkeiten, Divergenz eines Vektorfeldes auf einer affinen Mannigfaltigkeit.
- § 16. *-Operator, Coableitung, Laplace-Beltrami-Operator** 170
- *-Operator $*$: $\tilde{\mathcal{F}}_p(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{n-p}(M)$, Coableitung δ : $\tilde{\mathcal{F}}_p(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{p-1}(M)$, Laplace-Beltrami-Operator Δ : $\tilde{\mathcal{F}}_p(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_p(M)$, Rechenregeln und Koordinatendarstellungen, speziell in Kugel- und Zylinderkoordinaten, Greensche Formeln, Transformationsgesetze für $*$, δ und Δ , *-Operator für vektorwertige Differentialformen $*$: $\tilde{\mathcal{F}}_p(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{n-p}(M)$, Beziehungen zwischen den speziellen Formen $ds \in \tilde{\mathcal{F}}_1(M)$, $dF \in \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}(M)$, $dV \in \tilde{\mathcal{F}}_n(M)$.

§ 17. Vektoranalysis 185

Kanonische Isomorphie von $\tilde{\mathfrak{F}}_0(M)$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_1(M)$ für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M , Divergenz, Gradient, Rotation, vektoriel-
ler Laplace-Beltrami-Operator, Rechenregeln der Vektoranalysis
und Koordinatendarstellungen, Lemma von Poincaré in Vektor-
schreibweise, verschiedene Divergenzbegriffe, Äquivalenzkriterien,
Ricci-Tensor, geometrische Deutung der Divergenz.

**Kapitel IV: Integrationstheorie auf differenzierbaren
Mannigfaltigkeiten**

§ 18. Das Transformationsgesetz für Gebietsintegrale 201

Meßbare Mengen, Nullmengen, Riemannintegral über kompakten
meßbaren Mengen, Volumenänderung unter Diffeomorphismen,
Transformationsgesetze für Riemannintegrale über kompakten
meßbaren Mengen.

**§ 19. Integration von Funktionen und Differentialformen auf
Mannigfaltigkeiten** 209

Integral stetiger Funktionen mit kompaktem Träger über Mannig-
faltigkeiten mit differenzierbarem Volumenmaß $d\mu$, Linearität,
Positivität, Transformationsgesetz, Integral stetiger Funktionen
über kompakten meßbaren Mengen einer Mannigfaltigkeit mit
Volumenmaß $d\mu$, Transformationsverhalten bei Wechsel des Vo-
lumenmaßes, Integral von Differentialformen, Linearität, Positivi-
tät, Transformationsgesetz, Integral vektorwertiger Differentialfor-
men über flachen affinen Mannigfaltigkeiten.

§ 20. Satz von Stokes und seine Umkehrung 220

Der Satz von Stokes als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der
Differential- und Integralrechnung, Anwendungen in Topologie
und Algebra: Satz vom Igel, Brouwerscher Fixpunktsatz, Hauptsatz
der Algebra; Umkehrung des Stokessche Integralsatzes, Abbildungs-
grad, Satz von Stokes für vektorwertige Differentialformen.

§ 21. Greensche Integralformeln 232

Greensche Integralformeln und ihre Umformulierung in der Sprache
der Vektoranalysis, weitere Integralformeln der Vektoranalysis.

§ 22. Stückweise glatte Untermannigfaltigkeiten 238

Stückweise glatte Graphen stetiger Funktionen als lokale Bausteine
stückweise glatter Untermannigfaltigkeiten, stückweise glatt be-
randete Untermannigfaltigkeiten, Integration über stückweise glatte
Untermannigfaltigkeiten, Ausdehnung des Satzes von Stokes auf
stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeiten.