

Etienne Emmrich

# **Gewöhnliche und Operator- Differentialgleichungen**

**Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme  
und Evolutionsgleichungen für Studierende**



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>V</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>Randwertprobleme</b>	<b>1</b>
<b>1 Beispiele und Anwendungen. Klassifikation</b>	<b>1</b>
1.1 Beispiele und Anwendungen . . . . .	1
1.2 Klassifikation . . . . .	9
<b>2 Klassische Lösungstheorie</b>	<b>13</b>
2.1 Lineare Differentialgleichungen und elementare Lösungsmethoden .	14
2.2 Randwertprobleme für homogene, lineare Differentialgleichungen .	21
2.3 GREENSche Funktion und semilineare Probleme I . . . . .	28
2.4 GREENSche Funktion und inhomogene, lineare Probleme . . . . .	34
2.5 Maximumprinzip und Stabilität . . . . .	36
2.6 STURM-LIOUVILLE-Problem . . . . .	42
2.7 GREENSche Funktion und semilineare Probleme II . . . . .	45
2.8 Ober- und Unterlösungen . . . . .	53
<b>3 Schwache Lösungstheorie</b>	<b>57</b>
3.1 Verallgemeinerte Ableitung und Regularisierung . . . . .	57
3.2 SOBOLEW-Räume $H^1(a, b)$ , $H_0^1(a, b)$ und $H^{-1}(a, b)$ . . . . .	71
3.3 Variationelle Formulierung und Operatorgleichung . . . . .	83
3.4 Lineare Variationsprobleme mit stark positiver Bilinearform . . . .	89
3.5 Nichtlineare Variationsprobleme mit stark monotonem Operator .	96
3.6 Nichtlineare Variationsprobleme mit verstärkt stetiger Störung . .	102
<b>4 GALERKIN-Verfahren</b>	<b>110</b>
4.1 Diskrete Ersatzaufgabe und Fehlerabschätzungen . . . . .	110
4.2 Beweis eines Existenzsatzes für nichtlineare Probleme . . . . .	114
4.3 Finite-Elemente-Methode . . . . .	120
<b>5 Übungsaufgaben. Literaturhinweise</b>	<b>126</b>
5.1 Übungsaufgaben . . . . .	126
5.2 Literaturhinweise . . . . .	133

<b>Operator-Differentialgleichungen</b>	<b>138</b>
<b>6 Beispiele und Anwendungen. Abstrakte Formulierung</b>	<b>138</b>
6.1 Beispiele und Anwendungen . . . . .	138
6.2 Abstrakte Formulierung . . . . .	147
<b>7 Klassische Lösungstheorie</b>	<b>150</b>
7.1 Räume stetiger und BOCHNER-integrierbarer Funktionen . . . . .	150
7.2 Eine Verallgemeinerung des Satzes von PICARD-LINDELÖF . . . . .	168
7.3 Stabilität und dissipative Systeme . . . . .	180
7.4 Eine Verallgemeinerung des Satzes von PEANO . . . . .	188
7.5 Zeitdiskretisierung durch einfache Einschrittverfahren . . . . .	192
<b>8 Schwache Lösungstheorie</b>	<b>200</b>
8.1 Verallgemeinerte Ableitung und der Raum $\mathcal{W}(0, T)$ . . . . .	200
8.2 Variationelle Formulierung und Operator-Differentialgleichung . . . . .	213
8.3 Lineare Evolutionsgleichungen und deren Zeitdiskretisierung . . . . .	217
8.4 Nichtlineare Evolutionsgleichungen und GALERKIN-Approximation . . . . .	230
8.5 Regularität, Kompatibilität der Daten und Glättungseigenschaft . . . . .	245
<b>9 Übungsaufgaben. Literaturhinweise</b>	<b>258</b>
9.1 Übungsaufgaben . . . . .	258
9.2 Literaturhinweise . . . . .	265
<b>Anhang</b>	<b>269</b>
<b>A Analytische Hilfsmittel</b>	<b>269</b>
A.1 Elementare Ungleichungen . . . . .	269
A.2 Einige Sätze aus der Analysis und Funktionalanalysis . . . . .	272
A.3 Literaturhinweise . . . . .	282
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>283</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>293</b>
<b>Namenverzeichnis</b>	<b>295</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>297</b>