

Reinhard Schuster

Biomathematik

Mathematische Modelle in der Medizinischen Informatik
und in den Computational Life Sciences
mit Computerlösungen in Mathematica

STUDIUM



Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Funktionen, Einführung in Mathematica	1
1.1	Grafische Darstellung und erste Berechnungen mit Mathematica	1
1.2	Quadratische Funktionen und Mathematica	8
1.3	Potenzfunktionen	13
1.4	Exponential - und Logarithmusfunktionen	15
1.5	Winkelfunktionen	16
1.6	Hyperbolische Winkelfunktionen	18
1.7	Komplexe Zahlen	20
1.8	Polynome und rationale Funktionen	23
1.9	Wiederholung zur Differential- und Integralrechnung	24
1.10	Kurvendiskussion mit Mathematica	31
1.11	Exponentialfunktion und Winkelfunktionen mit komplexen Argumenten	33
2	Modellierung durch Differentialgleichungen und dynamische Systeme	42
2.1	Einführung	42
2.2	Abstrakte Definition dynamischer Systeme	43
2.3	Gewöhnliche Differentialgleichungen	46
3	Wachstumsmodelle in Medizin, Biologie und Biochemie, Dynamik einer von der Zeit abhängigen Population	51
3.1	Exponentielles Wachstum als Differentialgleichungsmodell und geometrisches Wachstum als diskretes Analogon	51
3.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer autonomen Differentialgleichung	57
3.3	Wachstum mit Sättigung: Verhulstgleichung und logistisches Wachstum	61
3.4	Bernoulli-Zahlen und Bernoulli-Polynome	69
3.5	Gleichgewichtspunkte der Verhulstgleichung	73
3.6	Massenwirkungsgesetz als Differentialgleichungsmodell	75
3.7	Die Verhulstgleichung unter Einwirkung einer Räuberpopulation: Hystereseeigenschaften der Lösungen, Stabilität in Abhängigkeit von Parametern	82
3.8	Unterschiedliche Zeitskalen in der Michaelis-Menten-Theorie der Enzymkinetik, singuläre Störungstheorie	95
3.9	Diffusion durch Zufallsbewegungen	104

3.10	Ergänzung durch einen Diffusionsterm: Wellenansatz; Veränderung des Stabilitätsverhaltens durch räumliche Wirkungsausbreitung . . .	107
3.11	Verhulstgleichung mit Verzögerung, Abhängigkeiten der Dämpfung und Oszillation der Lösungen von der Verzögerungszeit und Verzweigungspunkte für Lösungen	118
3.12	Diskretes logistisches Modell: Periodenverdopplung und Feigenbaumkonstante	124
3.13	Weitere Modelle zu einer abhängigen Population: Bertalanffy-, Gompertz-Gleichung, hyperbolisches, parabolisches und Michaelis-Menten-Wachstum	129
3.14	Fibonacci-Folgen	134
3.15	Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung, Fourierreihen	138
4	Funktionalgleichungsmodelle	147
5	Lineare Gleichungssysteme, Vektorräume und Zusammenhänge zwischen algebraischen und analytischen Modellen	152
5.1	Einführung	152
5.2	Matrizen	154
5.3	Determinanten	158
5.4	Inverse Matrizen	160
5.5	Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme	162
5.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	165
5.7	Anwendung in der Populationsgenetik	168
5.8	Vektorräume und lineare Abbildungen	172
5.9	Struktur der Lösung linearer Gleichungssysteme	179
5.10	Einführung in Zusammenhänge zwischen algebraischen und analytischen Modellen	182
5.11	Transformationsformeln für Gebietsintegrale und Differentiale als Basiselemente von Graßmann-Algebren	189
6	Populationen mit Wechselwirkung. Eigenschaften und Anwendungen dynamischer Systeme in Biologie und Medizin	193
6.1	Das Lotka - Volterra - System als Räuber-Beute-Modell	193
6.2	Konkurrenz und Symbiose, das Volterrasche Exklusionsprinzip . . .	200
6.3	Gleichgewichtspunkte und Stabilität. Linearisierung als Grundprinzip	207
6.4	Ein Räuber-Beute-Modell mit Grenzyklus	211
6.5	Reaktionskinetik eines Systems, das durch das Massenwirkungsgesetz beschrieben wird: Brüsselator	220
6.6	Reversible Reihenschaltung in der Physiologie	221

6.7	Das „pharmakokinetische Grundmodell“: physiologische Wechselwirkungen von Muskeln, Blut, Niere und Leber	227
6.8	Das SIR-Modell zur Ausbreitung von Infektionskrankheiten	229
6.9	Ein SIS - Mehrkompartimentmodell und dessen Stabilitätsverhalten	236
7	Rückkopplungssysteme, Bifurkationseigenschaften und weitere Strukturelemente biomathematischer Modelle	241
7.1	Periodische Impulse und Impulsverstärkung in der Hodgkin-Huxley-Theorie der Nervenmembranen	241
7.2	Enzym, mRNA und Reaktionsprodukt im Goodwin-Modell als Beispiel eines Rückkopplungssystems	249
7.3	Hysteresis, Pilzköpfe und Inseln: Anzahl und Stabilität von Gleichgewichtspunkten in Abhängigkeit eines Parameters	255
7.4	Parameterabhängige Gleichgewichtspunkte: Bifurkationstheorie	262
7.5	Dynamische Krankheiten in der Physiologie	271
7.6	Ljapunov-Funktionen und global stabile Gleichgewichtslösungen	277
7.7	„Schwarze Löcher“ in biologischen Systemen, der Sekundenherztod	279
7.8	Van der Polsche Gleichung: Existenz und Eindeutigkeit eines Grenzzyklusses	286
8	Grenzmengen und Attraktoren, strukturelle Stabilität	294
8.1	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	294
8.2	Nichtlineare autonome Differentialgleichungen	299
8.3	Grenzmengen und Attraktoren	303
8.4	Strukturelle Stabilität	308
8.5	Zweidimensionale dynamische Systeme	309
8.6	Lorenz-Attraktor und Rössler-Modell	316
8.7	Einführung in die Thomische Katastrophentheorie	324
9	Fraktale	329
9.1	Von den „Monsterkurven der Analysis“ zu den Fraktalen	329
9.2	Juliamengen und Mandelbrotmenge	336
9.3	Komplexe Cantorsche Mengen	342
	Anhang	345
	Literatur	347
	Index	351