

Paulo Ribenboim

Die Welt der Primzahlen

Geheimnisse und Rekorde

Aus dem Englischen übersetzt von Jörg Richstein.
Auf den neuesten Stand gebracht von Wilfrid Keller.

Mit 29 Tabellen



Springer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	vii
Danksagungen	ix
Anleitung für den Leser	xv
Erklärung der Symbole	xvii
Einleitung	1
1 Wieviele Primzahlen gibt es?	3
I Beweis von Euklid	3
II Ein Beweis von Goldbach!	6
III Beweis von Euler.	8
IV Beweis von Thue.	10
V Drei vergessene Beweise.	10
A Beweis von Perott	11
B Beweis von Auric.	11
C Beweis von Métrod	12
VI Beweis von Washington.	12
VII Beweis von Furstenberg.	13
2 Wie kann man Primzahlen erkennen?	15
I Das Sieb des Eratosthenes.	16
II Einige grundlegende Sätze über Kongruenzen	17

A	Der kleine Satz von Fermat und Primitivwurzeln modulo einer Primzahl	17
B	Der Satz von Wilson	20
C	Die Eigenschaften von Giuga und von Wolstenholme	22
D	Primzahlpotenzen als Teiler der Fakultät einer Zahl	24
E	Der chinesische Restsatz	27
F	Die Eulersche φ -Funktion	28
G	Folgen von Binomialzahlen	34
H	Quadratische Reste	37
III	Klassische Primzahltests auf der Grundlage von Kongruenzen	39
IV	Lucas-Folgen	44
V	Primzahltests auf der Grundlage von Lucas-Folgen	59
VI	Fermat-Zahlen	71
VII	Mersenne-Zahlen	76
VIII	Pseudoprimzahlen	89
A	Pseudoprimzahlen zur Basis 2 (psp)	89
B	Pseudoprimzahlen zur Basis a (psp(a))	93
C	Euler-Pseudoprimzahlen zur Basis a (epsp(a))	96
D	Starke Pseudoprimzahlen zur Basis a (spsp(a))	98
IX	Carmichael-Zahlen	101
X	Lucas-Pseudoprimzahlen	104
A	Fibonacci-Pseudoprimzahlen	105
B	Lucas-Pseudoprimzahlen (lpsp(P, Q))	107
C	Euler-Lucas-Pseudoprimzahlen (elpsp(P, Q)) und starke Lucas-Pseudoprimzahlen (slpsp(P, Q))	108
D	Carmichael-Lucas-Zahlen	109
XI	Primzahltests und Faktorisierung	110
A	Aufwand für einen Primzahltest	111
B	Weitere Primzahltests	113
C	Titanische und sonderbare Primzahlen	122
D	Faktorisierung	125
E	Kryptographie mit öffentlichem Schlüssel	130
3	Gibt es primzahldefinierende Funktionen?	135
I	Funktionen mit der Eigenschaft (a)	135
II	Funktionen mit der Eigenschaft (b)	141
III	Primzahlerzeugende Polynome	142
A	Primzahlwerte linearer Polynome	144

B	Über quadratische Zahlkörper	144
C	Primzahlerzeugende quadratische Polynome	149
D	Der Wettlauf um Primzahlwerte und Primteiler	153
IV	Funktionen mit der Eigenschaft (c).	156
4	Wie sind die Primzahlen verteilt?	161
I	Die Funktion $\pi(x)$	162
A	Historische Entwicklung.	163
B	Summen unter Einschluß der Möbius-Funktion	176
C	Primzahltabellen	177
D	Exakte Werte von $n(x)$ und Vergleiche mit $x/\log x$, $\mathbf{Li(x)}$ und $R(x)$	178
E	Die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$	181
F	Nullstellenfreie Bereiche von $\zeta(s)$ und das Fehl- erglied im Primzahlsatz.	185
G	Einige Eigenschaften von $\pi(x)$	186
H	Die Verteilung der Werte von Eulers Funktion	188
II	Die n-te Primzahl und Lücken zwischen Primzahlen	189
A	Die n-te Primzahl.	189
B	Lücken zwischen Primzahlen.	190
III	Primzahlzwillinge.	198
IV	Primzahlmehrlinge.	203
V	Primzahlen in arithmetischer Folge.	211
A	Es gibt unendlich viele!	211
B	Die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Folge.	213
C	Primzahlreihen in arithmetischer Folge.	215
VI	Goldbachs berühmte Vermutung	217
VII	Die Verteilung von Pseudoprimzahlen und Carmichael- Zahlen.	223
A	Verteilung von Pseudoprimzahlen.	223
B	Verteilung von Carmichael-Zahlen.	225
C	Verteilung von Lucas-Pseudoprimzahlen	227
5	Welche besonderen Arten von Primzahlen wurden untersucht?	229
I	Reguläre Primzahlen	229
II	Sophie-Germain-Primzahlen.	233
III	Wieferich-Primzahlen.	236
IV	Wilson-Primzahlen.	241
V	Repunit-Primzahlen.	242

VI	Zahlen der Form $k \times b^n \pm 1$	244
VII	Primzahlen und linear rekurrente Folgen zweiter Ordnung	250
6	Heuristische und probabilistische Betrachtungen	257
I	Primzahlwerte linearer Polynome	258
II	Primzahlwerte von Polynomen beliebigen Grades	261
III	Polynome mit großen Bereichen zerlegbarer Werte	269
IV	Partitio Numerorum	271
	Anhang	277
	Ausklang	281
	Literatur	283
	Webseiten	325
	Primzahlen bis 10 000	327
	Verzeichnis der Tabellen	331
	Verzeichnis der Rekorde	333
	Namensverzeichnis	335
	Sachverzeichnis	349