

Bernd Kuppinger

Finanzmathematik

WILEY

Inhalt

Einleitung	13
1 Es geht ums Geld	17
1.1 Zeit und Geld	17
1.2 Inflation und Deflation	18
1.3 Barwert und Endwert	21
1.3.1 Nominalwert und Äquivalenzprinzip	22
Teil I: Einzelne Zahlungen	25
2 Zinsrechnung über ganze Jahre	25
2.1 Definition wichtiger Begriffe	25
2.2 Zinsberechnung über eine Periode/ein Jahr	26
2.2.1 Vom Endwert zum Barwert	27
2.3 Einfache Verzinsung über mehrere Perioden/mehrere Jahre	28
2.3.1 Zinsanteil und Kapitalendwert	29
2.3.2 Vom Endwert zum Barwert	30
2.3.3 Unterschiedliche Zinssätze	31
2.3.3.1 Vom Endwert zum Barwert bei unterschiedlichen Zinssätzen	31
2.4 Zinseszinsrechnung über mehrere Perioden/Jahre	32
2.4.1 Kapitalendwertberechnung mit Zinseszinsen	34
2.4.2 Der Barwert in der Zinseszinsrechnung	36
2.4.3 Zinseszinsrechnung mit unterschiedlichen Periodenzinssätzen	36
2.5 Durchschnittliche Verzinsung	38
2.5.1 Durchschnittliche Verzinsung bei einfacher Verzinsung	38
2.5.2 Durchschnittszins bei exponentieller Verzinsung	39
2.5.2.1 Die Ungleichheit von geometrischem und arithmetischem Mittel	40
2.6 Anwendungsbeispiele für die lineare und die exponentielle Verzinsung	40
2.7 Formelübersicht zu den Kapitel 2	41
3 Unterjährliche Zinsrechnung	43
3.1 Zum Unterschied zwischen Nominal- und Effektivzinssatz	44
3.2 Unterjährlich lineare Verzinsung	44
3.2.1 Der linear proportionale Zinssatz	45
3.2.1.1 Konformer Zinssatz	46
3.3 Konformer Zinssatz bei unterjährlicher Zinseszinsrechnung	46

3.3.1	Linear proportionaler Zinssatz nicht mehr konform	47
3.3.2	Der exponentiell proportionale Zinssatz	48
3.3.3	Effektivzinssatz bei unterjährlicher Verzinsung - Effektivzins zum Ersten	49
3.3.4	Zinsberechnungsmethoden	51
3.3.4.1	Deutsche kaufmännische Methode (30/360)	52
3.3.4.2	Französische Methode (act/360)	53
3.3.4.3	Effektivzinsmethode (act/act)	54
3.3.4.4	Anwendungsbeispiel Lieferantenkredit	55
3.3.5	Stetige Verzinsung	56
3.3.5.1	Grenzwert der stetigen Verzinsung	56
3.3.5.2	Anwendungen der stetigen Verzinsung	57
3.4	Unterjährliche Zinseszinsrechnung über mehrere Jahre	59
3.4.1	Verwendung des linear proportionalen Zinssatzes	59
3.4.1.1	Extremfall stetige Verzinsung	60
3.4.2	Verwendung des exponentiell proportionalen Zinssatzes	60
3.4.2.1	Gebrochene Exponenten in der Zinseszinsrechnung	61
3.5	Gemischte Verzinsung	62
3.5.1	Berechnung des Kontostandes bei unterjährlichen Ein- und Auszahlungen	63
3.5.2	Barwert bei gemischter Verzinsung	65
3.5.3	Die Ungerechtigkeit der gemischten Verzinsung	66
3.6	Formelübersicht zu den Kapiteln 2 und 3	67

Teil II: Mehrere Zahlungen **71**

4 Zahlungsströme **71**

4.1	Einleitung	71
4.2	Finanzmathematische Bewertung von Zahlungsströmen	71
4.2.1	Endwertberechnung	73
4.3	Der Kalkulationszinssatz	74
4.3.1	Kriterien für den Kalkulationszinssatz	75
4.4	Zahlungsströme mit unterjährlichen Zahlungen	76
4.4.1	Unterjährliche Zinseszinsen	77
4.4.2	Unterjährlich lineare Verzinsung	78
4.4.3	Vergleich der beiden unterjährlichen Varianten	79
4.5	Formelübersicht	80

5 Rentenrechnung **83**

5.1	Zahlungsempfang oder Zahlungsleistung - kommt es darauf an?	83
5.2	Rentenwert bei konstanter Rate und konstantem Zinssatz	84

- 5.2.1 Nachschüssige Zahlungsweise 85
 - 5.2.1.1 Anwendung der geometrischen Reihe 86
- 5.2.2 Vorschüssige Zahlungsweise 87
- 5.2.3 Unterjährliche Rentenzahlungen 89
 - 5.2.3.1 Unterjährliche Zinseszinsrechnung 89
 - 5.2.3.2 Gemischte Verzinsung 90
- 5.3 Rentenwert bei unterschiedlichen Raten und Zinssätzen 91
 - 5.3.1 Unterschiedliche Zinssätze - Teilrenten 91
 - 5.3.2 Unterschiedliche Raten - Dynamische Renten 93
 - 5.3.2.1 Arithmetische Änderung der Rate 94
 - 5.3.2.2 Geometrische Änderung der Rate 95
- 5.4 Formelübersicht 98

6 Kapitalaufbau und Kapitalverbrauch

101

- 6.1 Kapitalaufbau 101
- 6.2 Nachschüssiger Kapitalverbrauch 103
 - 6.2.1 Berechnung der möglichen Entnahmerate 105
 - 6.2.1.1 Berechnung des benötigten Anfangskapitals 105
 - 6.2.1.2 Berechnung der möglichen Entnahmedauer 106
 - 6.2.2 Entnahme ohne Verbrauch - Ewige Rente 106
 - 6.2.3 Kapitalaufbau trotz Entnahme 107
 - 6.2.4 Unterjährliche Raten 108
- 6.3 Vorschüssiger Kapitalverbrauch 109
- 6.4 Kapitalverbrauch mit geometrischer Rate 110
 - 6.4.1 Bar- und Endwertberechnung 110
 - 6.4.2 Berechnung der möglichen Entnahmedauer 111
- 6.5 Kombination von Kapitalaufbau und -verbrauch 112
 - 6.5.1 Jährliche Raten 113
 - 6.5.2 Unterjährliche Entnahme 114
 - 6.5.3 Unterbrechung zwischen Aufbau und Verbrauch 115
 - 6.5.4 Unterbrechungen innerhalb der Anspar- oder Verbrauchsphase 116
 - 6.5.5 Anfangs- und Endkapital ungleich null 117
- 6.6 Formelübersicht 118

7 Tilgungsrechnung

121

- 7.1 Begriffe 121
- 7.2 Endfällige Darlehen 123
 - 7.2.1 Jährlich geleistete Zinszahlungen 123
 - 7.2.2 Zinszahlung am Ende der Laufzeit 123
- 7.3 Tilgung in jährlichen Raten 124
 - 7.3.1 Ratentilgung 124

7.3.2	Annuitätentilgung	126
7.3.3	Vergleich von Raten- und Annuitätentilgung	127
7.3.3.1	Ein anderer Weg zur gleichen Erkenntnis	129
7.3.4	Bestimmung der Laufzeit bei Raten- und Annuitätentilgung	130
7.4	Tilgung in unterjährlichen Raten	131
7.4.1	Unterjährlich lineare Verzinsung	131
7.4.2	Unterjährlich exponentielle Verzinsung	133
7.5	Effektivzinssatz von Krediten - Effektivzins zum Zweiten	136
7.5.1	Zwei Ideen zur Effektivzinsbestimmung	136
7.5.2	Tilgungspläne zur Effektivzinsbestimmung	137
7.5.3	Vorgehensweise zur richtigen Effektivzinsermittlung	139
7.5.4	Vergleich mit dem Effektivzins der unterjährlichen Zinseszinsrechnung	141
7.6	Formelübersicht	142

8 Wertpapiere – Kauf und Verkauf von Zahlungsansprüchen **145**

8.1	Allgemeines zu Kurs und Rendite	145
8.1.1	Der Kurs als Werteverhältnis	145
8.1.2	Die Rendite als Zinssatz	146
8.2	Wertpapiere und Anleihen – Begriffe	148
8.3	Zahlungsstrom einer festverzinslichen Anleihe	148
8.3.1	Kurs einer Anleihe bei ganzjähriger Restlaufzeit	149
8.3.1.1	Warum nicht lineare Diskontierung?	151
8.3.2	Rendite einer festverzinslichen Anleihe	152
8.3.2.1	Rendite mit Nominalwerten	152
8.3.2.2	Rendite allgemein	153
8.3.2.3	Negative Rendite = Verlust	154
8.3.3	Rendite bei vorzeitigem Verkauf	155
8.3.3.1	Erster Fall, Zinssatz gefallen	156
8.3.3.2	Zweiter Fall, Zinssatz gestiegen	157
8.3.3.3	Die Perspektive des Käufers	157
8.4	Kursberechnung bei beliebiger Restlaufzeit	157
8.4.1	Stückzins- und Kursberechnung	158
8.5	Formelübersicht	159

Teil III: Investitionsrechnung **161**

9 Einzelne Investitionsprojekte **161**

9.1	Voraussetzungen und Begriffe	162
9.1.1	Investition und Normalinvestition	162

9.1.2	Umgang mit Unsicherheit – Modellcharakter der Investitionsrechnung	163
9.1.3	Planungszeitraum, Abschreibungen und Steuern	163
9.1.4	Finanzierungsarten	164
9.1.5	Zahlungen während des Investitionsprozesses	164
9.2	Ein kurzer Blick auf statische Verfahren	165
9.2.1	Gewinnrechnung	165
9.3	Dynamische Verfahren	166
9.3.1	Die Wahl des Kalkulationszinssatzes	167
9.3.2	Beispiel für die Investitionsrechnung	167
9.4	Kapitalwertmethode	169
9.4.1	Interpretation des Ergebnisses	169
9.4.1.1	Der Endwert ist die anschaulichere Größe	170
9.4.1.2	Zurück zum Barwert	171
9.4.2	Deutung eines negativen Barwertes	172
9.4.3	Fazit Kapitalwertmethode	173
9.4.4	Exkurs – Kreditvergabe als Investition	173
9.5	Amortisationsdauer	174
9.5.1	Die Amortisationsdauer als Beurteilungskriterium	175
9.6	Der innere Zins – Effektivzins zum Dritten	175
9.6.1	Grafische Darstellung des inneren Zinssatzes	176
9.6.2	Einfache Fälle	176
9.7	Vermögensendwertmethode	177
9.7.1	Kontenausgleichsverbot	178
9.7.2	Kontenausgleichsgebot	179
9.8	Methodenvergleich	180
9.9	Steuerliche Effekte	180
9.9.1	Veränderung des Kalkulationszinssatzes	180
9.9.2	Anwendung auf das Einführungsbeispiel	181
9.9.2.1	Erörterung des Ergebnisses	182
9.10	Nicht-Normalinvestitionen	183
9.11	Formelübersicht	185

10 Vergleich von Investitionsprojekten

189

10.1	Beispiel für die Vergleichsrechnung	189
10.2	Vergleich der Kapitalwerte – Vorteil Investition 1	190
10.2.1	Voraussetzungen für die Vergleichbarkeit	190
10.2.1.1	Unterschiedliche Anfangsauszahlung	191
10.2.1.2	Differenzinvestition	191
10.2.1.3	Unterschiedliche Nutzungsdauer	192
10.3	Einspruch – beim inneren Zins gewinnt Investition 2!	193
10.3.1	Bestimmung des Schnittpunktes der Barwertkurven	194

- 10.4 Und was sagt die Amortisationsdauer? 194
- 10.5 Fazit 195
- 10.6 Ausschlussverfahren ohne Rechnung 195
- 10.7 Formelübersicht 197

11 Weg mit der Kristallkugel – Unsicherheiten bei Investitions- entscheidungen

199

- 11.1 Unsichere Größen im Investitionsprozess 200
 - 11.1.1 Anwendung auf das Beispiel 200
 - 11.1.1.1 Einheitlicher Korrekturfaktor für die Rückflüsse 201
 - 11.1.1.2 Periodenbezogener Korrekturfaktor für die Rückflüsse 201
 - 11.1.1.3 Unsicherheit des Kalkulationszinssatzes 201
 - 11.2 Sensitivitätsanalysen 202
 - 11.2.1 Sensitivitätsanalyse eines Parameters 202
 - 11.2.2 Sensitivitätsanalyse mit zwei Parametern 203
 - 11.2.2.1 Wie Sie den vorteilhaften Bereich erkennen 204
 - 11.3 Alternativrechnungen 205
 - 11.3.1 Simultane Alternativrechnungen mit zwei Parametern 205
 - 11.3.1.1 Tabellarische Ergebnisübersicht 206
 - 11.3.1.2 Grafische Ergebnisaufbereitung – Risikoprofil 207
 - 11.3.1.3 Interpretation der Rechteck-Flächen 209
 - 11.3.2 Viele Parameter – Simulation mit Excel 212
 - 11.3.2.1 Auswahl der Parameter und Wahrscheinlichkeitsannahmen 212
 - 11.3.2.2 Idee der Simulation 214
 - 11.3.2.3 Zufall per Computer 214
 - 11.3.2.4 Umsetzung mit Excel 215
 - 11.3.2.5 Zuordnung von Parameterwerten 215
 - 11.3.2.6 Berechnung der Barwerte 216
 - 11.3.2.7 Klasseneinteilung und Häufigkeitszählung 217
 - 11.3.2.8 Darstellung als Risikoprofil 218
 - 11.3.2.9 Der Zufall im Zufall – „Beweglichkeit“ der Kurven 220
 - 11.3.2.10 Und was ist mit den Erwartungswerten? 220
 - 11.4 Formelübersicht 221

Teil IV ~~WENN SIE KEINEN ZUSÄTZLICHEN WERT ZU DEN ANGABEN HINZUFÜGEN WÜRDEN, WÜRDEN SIE KEINEN WERT HINZUFÜGEN~~ 223

12 Mathematische Grundlagen

223

- 12.1 Mathe? Konnte ich noch nie (leiden)! 223
- 12.2 Hantieren mit einfachen Gleichungen 224
 - 12.2.1 Umstellen von Gleichungen 225

12.2.2 Einseitige Operationen – Ausklammern und Erweitern	225
12.2.3 Auflösungserscheinungen	226
12.3 Hoch- und Tiefbau – Potenzen und Wurzeln	226
12.3.1 Potenzgesetze	227
12.3.1.1 Positiver ganzzahliger Exponent	227
12.3.1.2 Negativer ganzzahliger Exponent	227
12.3.1.3 Potenzierung von Potenzen	228
12.3.1.4 Wurzeln – Bruchzahlen als Exponent	228
12.3.1.5 Negative gebrochene Exponenten – Wurzeln im Nenner	229
12.3.1.6 Einschränkungen beim Wurzelziehen	230
12.4 Abhängigkeitsverhältnisse – Die Funktionen	230
12.4.1 Darstellung von Funktionen	231
12.4.2 Die Potenzfunktion	232
12.4.3 Rollentausch – Die Exponentialfunktion	234
12.4.4 Kommando zurück – Der Logarithmus	236
12.4.4.1 Die Bauweise der Logarithmusfunktion	237
12.4.4.2 Die verschiedenen Logarithmusfunktionen	238
12.4.4.3 Verlauf der e- und der ln-Funktion	239
12.4.5 Anwendungen der Logarithmusfunktion	239
12.4.5.1 Umkehrung der e-Funktion	239
12.4.5.2 Logarithmen von Produkten und Quotienten	239
12.4.5.3 Logarithmen von Potenzen	240
12.4.5.4 Umrechnung in eine andere Basis	241
12.5 Spezielle Gleichungen	242
12.5.1 Quadratische Gleichungen	242
12.5.1.1 Die Lösungen einer quadratischen Gleichung	243
12.5.2 Polynomiale Gleichungen und die Regula falsi	243
12.5.2.1 Die Regula falsi	244
12.5.2.2 Zweite Näherung	245
12.5.3 Der Excel-Solver	246
12.5.3.1 Aktivierung des Solvers	247
12.5.3.2 Aufruf des Solvers	247
12.5.4 Wurzelgleichungen	252
12.6 Folgen, Reihen und Summen	253
12.6.1 Das diskrete Pendant der Funktionen – die Folgen	253
12.6.1.1 Die arithmetische Folge	254
12.6.1.2 Die geometrische Folge	255
12.6.2 Summen und Reihen	256
12.6.2.1 Summenschreibweise	256
12.6.2.2 Rechenregeln für Summen	257
12.6.2.3 Berechnung einzelner Summen	258
12.6.2.4 Summenberechnung mit der arithmetischen Reihe	258
12.6.2.5 Summenberechnung mit der geometrischen Reihe	259

12.6.2.6	Herleitung von Formel 5-6	262
12.6.2.7	Unendliche Reihen	263
12.7	Prozente und Prozentpunkte	264
12.7.0.1	Prozentuale Änderungen berechnen	264
12.7.0.2	Prozentangabe in absoluten Wert umrechnen	265
12.7.0.3	Neuen Wert berechnen	265
12.7.0.4	Zurück zum bisherigen Wert rechnen	265
12.7.0.5	Prozentpunkte - Änderung von prozentual angegebenen Werten	266
	Lösungen zu den Übungsaufgaben	269
	Literaturverzeichnis	299
	Index	301