

Tilo Arens Frank Hettlich Christian Karpfinger Ulrich Kockelkorn
Klaus Lichtenegger Hellmuth Stachel

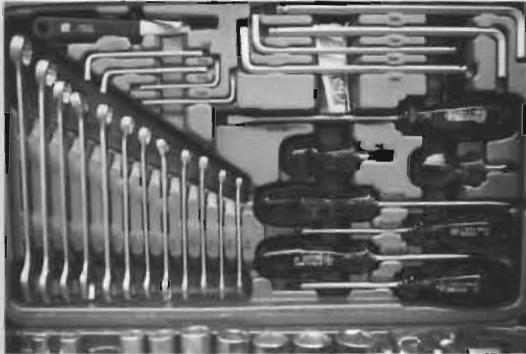
Mathematik

2. Auflage

Vorwort

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Einführung und Grundlagen



1	Mathematik – Wissenschaft und Werkzeug	1
1.1	Über dieses Lehrbuch, Mathematiker und Mathematik	2
1.2	Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler	5
1.3	Die didaktischen Elemente dieses Buches	8
1.4	Ratschläge zum Studium der Höheren Mathematik	11
2	Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	13
2.1	Eine beweisende Wissenschaft	14
2.2	Grundbegriffe der Aussagenlogik	15
2.3	Definition, Satz, Beweis	22
2.4	Elementare Mengenlehre	25
2.5	Zahlenmengen	29
2.6	Abbildungen	32
2.7	Mächtigkeit von Mengen	36
3	Rechentechiken – die Werkzeuge der Mathematik	43
3.1	Terme, Brüche und Potenzen	44
3.2	Gleichungen und Ungleichungen	51
3.3	Von Betrag und Abschätzungen	59
3.4	Summen und Produkte	63
3.5	Die vollständige Induktion	72
4	Elementare Funktionen – Bausteine der Analysis	85
4.1	Reellwertige Funktionen einer Veränderlichen	86
4.2	Polynome	94
4.3	Die Exponentialfunktion	105
4.4	Trigonometrische Funktionen	110

5	Komplexe Zahlen – Rechnen mit imaginären Größen	123
5.1	Die Menge der komplexen Zahlen	124
5.2	Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen	130
5.3	Mengen und Transformationen in der komplexen Ebene	139

Teil II: Analysis einer reellen Variablen



6	Folgen – der Weg ins Unendliche	149
6.1	Der Begriff einer Folge	150
6.2	Elementare Eigenschaften von Zahlenfolgen	153
6.3	Konvergenz	158
6.4	Teilfolgen und Häufungspunkte	166
6.5	Konvergenzkriterien	169
7	Stetige Funktionen – kleine Ursachen haben kleine Wirkungen	179
7.1	Zur Definition von Funktionen	180
7.2	Beschränkte und monotone Funktionen	185
7.3	Die Umkehrfunktion	186
7.4	Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	189
7.5	Kompakte Mengen	195
7.6	Sätze über reellwertige, stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich	200
8	Reihen – Summieren bis zum Letzten	215
8.1	Die Idee der Reihen	216
8.2	Kriterien für Konvergenz	224
8.3	Absolute Konvergenz	233
8.4	Kriterien für absolute Konvergenz	237

9	Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen	249
9.1	Definition und Grundlagen	250
9.2	Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen	257
9.3	Die Exponentialfunktion	265
9.4	Trigonometrische Funktionen	268
9.5	Der Logarithmus für komplexe Argumente	274
10	Differenzialrechnung – Veränderungen kalkulieren	283
10.1	Die Ableitung	284
10.2	Differenziationsregeln	293
10.3	Verhalten differenzierbarer Funktionen ..	301
10.4	Taylorreihen	316
10.5	Spline-Interpolation	328
11	Integrale – vom Sammeln und Bilanzieren	339
11.1	Das Lebesgue-Integral	340
11.2	Stammfunktionen	349
11.3	Integrale über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen	356
11.4	Geometrische Anwendungen des Integrals	365
11.5	Parameterintegrale	373
12	Integrationstechniken – Tipps, Tricks und Näherungsverfahren	383
12.1	Grundtechniken	384
12.2	Partielle Integration	387
12.3	Substitutionsmethode	391
12.4	Integration rationaler Funktionen	396
12.5	Numerische Integration	405
13	Differenzialgleichungen – Zusammenspiel von Funktionen und ihren Ableitungen	421
13.1	Begriffsbildungen	422
13.2	Numerische Lösungsmethoden	434
13.3	Analytische Lösungsmethoden	440
13.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	447

Teil III: Lineare Algebra



14	Lineare Gleichungssysteme – Grundlage der linearen Algebra	465
14.1	Erste Lösungsversuche	466
14.2	Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan	471
14.3	Das Lösungskriterium und Anwendungen	479
14.4	Numerische Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme	484
15	Vektorräume – Schauplätze der linearen Algebra	489
15.1	Der Vektorraumbegriff	490
15.2	Beispiele von Vektorräumen	497
15.3	Untervektorräume	499
15.4	Basis und Dimension	501
15.5	Affine Teilräume	510
16	Matrizen und Determinanten – Zahlen in Reihen und Spalten	519
16.1	Addition und Multiplikation von Matrizen	520
16.2	Das Invertieren von Matrizen	526
16.3	Symmetrische und orthogonale Matrizen	530
16.4	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	539
16.5	Einführung in die Determinanten	544
16.6	Definition und Eigenschaften der Determinante	547
16.7	Anwendungen der Determinante	553
17	Lineare Abbildungen und Matrizen – abstrakte Sachverhalte in Zahlen ausgedrückt	561
17.1	Ein einführendes Beispiel	562
17.2	Definition einer linearen Abbildung und Beispiele	564
17.3	Kern, Bild und die Dimensionsformel	570
17.4	Darstellungsmatrizen	574
17.5	Basistransformation	580
17.6	Determinanten von Endomorphismen ...	582

18 Eigenwerte und Eigenvektoren – oder wie man Matrizen diagonalisiert 589

18.1 Das Diagonalisieren von Matrizen 590

18.2 Eigenwerte und Eigenvektoren 594

18.3 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren 597

18.4 Diagonalisierbarkeit von Matrizen 602

18.5 Diagonalisierung symmetrischer und hermitescher Matrizen 607

18.6 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren 612

18.7 Die Exponentialfunktion für Matrizen ... 615

18.8 Die Jordan-Normalform einer Matrix 621

19 Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen 635

19.1 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum 636

19.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum 640

19.3 Weitere Vektorverknüpfungen im Anschauungsraum 645

19.4 Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen 660

20 Euklidische und unitäre Vektorräume – Geometrie in höheren Dimensionen .. 675

20.1 Euklidische Vektorräume 676

20.2 Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität . 680

20.3 Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente 685

20.4 Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme 692

20.5 Unitäre Vektorräume 695

21 Quadriken – ebenso nützlich wie dekorativ 703

21.1 Symmetrische Bilinearformen 704

21.2 Hermitesche Sesquilinearformen 711

21.3 Quadriken und ihre Hauptachsentransformation 715

21.4 Die Singulärwertzerlegung 727

21.5 Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung 729

22 Tensorrechnung – geschicktes Hantieren mit Indizes 743

22.1 Einführung in die Tensoralgebra 744

22.2 Kartesische Tensoren 751

23 Lineare Optimierung – ideale Ausnutzung von Kapazitäten 763

23.1 Typische Problemstellungen 764

23.2 Sonderfälle von Optimierungsproblemen . 768

23.3 Definitionen und Theorie 770

23.4 Wandern von Ecke zu Ecke 773

23.5 Das Simplexverfahren 777

Teil IV: Analysis mehrerer reeller Variablen



24 Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum 787

24.1 Wozu Funktionen von mehreren Variablen? 788

24.2 Stetigkeit 792

24.3 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit 796

24.4 Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 809

24.5 Der Hauptsatz über implizite Funktionen 816

24.6 Extremwertaufgaben 822

25 Gebietsintegrale – das Ausmessen von Körpern 833

25.1 Definition und Eigenschaften 834

25.2 Volumen, Masse und Schwerpunkt 845

25.3 Die Transformationsformel 849

25.4 Wichtige Koordinatensysteme 854

26 Kurven und Flächen – von Krümmung, Torsion und Längenmessung 867

26.1 Ebene Kurven 868

26.2 Die Bogenlänge von Kurven 873

26.3 Die Krümmung ebener Kurven 876

26.4 Raumkurven 879

26.5 Darstellung von Flächen 885

26.6 Basissysteme krummliniger Koordinaten . 889

27 Vektoranalysis – von Quellen und Wirbeln 903

27.1 Skalar- und Vektorfelder 904

27.2 Differenzialoperatoren 906

27.3 Kurvenintegrale 915

27.4 Oberflächenintegrale 922

27.5	Integralsätze	926	30.3	Fourierreihen	1043
27.6	Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	932	30.4	Die diskrete Fouriertransformation	1054
28	Differenzialgleichungssysteme – ein allgemeiner Zugang zu Differenzial- gleichungen	945	31	Funktionalanalysis – Operatoren wirken auf Funktionen	1067
28.1	Definition und qualitatives Lösungs- verhalten	946	31.1	Normierte Räume, Banachräume, Hilberträume	1068
28.2	Existenz von Lösungen	951	31.2	Lineare, beschränkte Operatoren und Funktionale	1075
28.3	Die Herleitung des Satzes von Picard- Lindelöf	957	31.3	Funktionale und Distributionen	1081
28.4	Die Lösung linearer Differenzial- gleichungssysteme	961	31.4	Operatoren in Hilberträumen	1087
28.5	Numerische Verfahren für Anfangswert- probleme: Konvergenz, Konsistenz und Stabilität	971	31.5	Approximation von Operatoren	1094
28.6	Randwertprobleme: Theorie und numerische Verfahren	975	32	Funktionentheorie – von komplexen Zusammenhängen	1101
29	Partielle Differenzialgleichungen – Modelle von Feldern und Wellen ...	991	32.1	Komplexe Funktionen und Differenzier- barkeit	1102
29.1	Klassifizierung partieller Differenzial- gleichungen	992	32.2	Komplexe Kurvenintegrale	1114
29.2	Separationsansätze	1000	32.3	Laurent-Reihen und Residuensatz	1125
29.3	Quasilineare partielle Differenzial- gleichungen erster Ordnung	1007	33	Integraltransformationen – Multiplizie- ren statt Differenzieren	1141
29.4	Potenzialtheorie	1012	33.1	Transformation von Funktionen	1142
29.5	Die Methode der finiten Elemente	1018	33.2	Die Laplacetransformation	1145
			33.3	Die Fouriertransformation	1158
			34	Spezielle Funktionen – nützliche Helfer	1175
			34.1	Die Gammafunktion	1176
			34.2	Differenzialgleichungen aus Separations- ansätzen	1178
			34.3	Das Sturm-Liouville-Problem	1180
			34.4	Orthogonalpolynome und Kugelfunk- tionen	1181
			34.5	Zylinderfunktionen	1188
			35	Optimierung und Variationsrechnung – Suche nach dem Besten	1195
			35.1	Optimierungsaufgaben	1196
			35.2	Optimierung unter Nebenbedingungen ..	1203
			35.3	Variationsrechnung	1208
			35.4	Numerische Verfahren zur Optimierung ..	1215

Teil V: Höhere Analysis



30	Fouriertheorie – von schwingenden Saiten	1033
30.1	Trigonometrische Polynome	1034
30.2	Approximation im quadratischen Mittel ..	1037

Teil VI: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik



36 Deskriptive Statistik – wie man Daten beschreibt	1227	38.3 Das Gesetz der großen Zahlen und der Hauptsatz der Statistik	1310
36.1 Grundbegriffe	1228	38.4 Mehrdimensionale zufällige Variable	1316
36.2 Darstellungsformen	1230	39 Spezielle Verteilungen – Modelle des Zufalls	1327
36.3 Lageparameter	1237	39.1 Spezielle diskrete Verteilungsmodelle ...	1328
36.4 Streuungsparameter	1246	39.2 Stetige Verteilungen	1337
36.5 Strukturparameter	1250	39.3 Die Normalverteilungsfamilie	1347
36.6 Mehrdimensionale Verteilungen	1252	40 Schätz- und Testtheorie – Bewerten und Entscheiden	1367
37 Wahrscheinlichkeit – die Gesetze des Zufalls	1269	40.1 Grundaufgaben der induktiven Statistik	1368
37.1 Wahrscheinlichkeits-Axiomatik	1270	40.2 Die Likelihood und der Maximum-Likelihood-Schätzer	1370
37.2 Die bedingte Wahrscheinlichkeit	1277	40.3 Die Güte einer Schätzung	1378
37.3 Die stochastische Unabhängigkeit	1282	40.4 Konfidenzintervalle	1382
37.4 Kombinatorik	1284	40.5 Grundprinzipien der Testtheorie	1389
38 Zufällige Variable – der Zufall betritt den \mathbb{R}^1	1295	41 Lineare Regression – die Suche nach Abhängigkeiten	1403
38.1 Der Begriff der Zufallsvariablen	1296	41.1 Die Ausgleichsgeraden	1404
38.2 Erwartungswert und Varianz einer zufälligen Variablen	1304	41.2 Das Regressionsmodell	1406
		41.3 Schätzen und Testen im linearen Modell	1411
		41.4 Die lineare Einfachregression	1418
		41.5 Fallstricke im linearen Modell	1424
		Hinweise zu den Aufgaben	1433
		Lösungen zu den Aufgaben	1456
		Bildnachweis	1481
		Symbolglossar	1483
		Index	1493