

Werner Neundorf

Numerik
gewöhnlicher Differentialgleichungen
mit Computeralgebrasystemen
Anfangswertprobleme



Universitätsverlag Ilmenau
2013

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialgleichungen in der Praxis	1
1.1	Elektrotechnik	1
1.2	Mechanik	4
1.3	Thermodynamik und Chemie	7
1.4	Physik	8
1.5	Mathematik	21
1.6	Biologie und Populationsdynamik	28
1.7	Medizin	33
1.8	Weitere Beispiele	35
1.8.1	Skalare gDGl 1. Ordnung	35
1.8.2	Systeme von zwei gDGl 1. Ordnung	46
1.8.3	Systeme von n gDGl 1. Ordnung	50
1.8.4	Skalare gDGl 2. und höherer Ordnung	52
2	Differentialgleichungen mit Maple	59
2.1	Analytische Lösung von Differentialgleichungen	60
2.2	Lösungsdarstellung von Differentialgleichungen	68
2.2.1	Richtungsfeld der Differentialgleichung	69
2.2.2	Numerische Lösung	75
2.2.3	Richtungsfeld und numerische Lösung	97
2.3	Definitionsbereiche von Lösungen	146
2.4	Eindeutige Lösung von Anfangswertproblemen	203
2.5	Mehrdeutige Lösung von Anfangswertproblemen	210
2.6	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	253
2.7	Spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen	297

3	Differenzen, Differenzenquotienten, Taylor-Reihen	333
3.1	Differenzen	333
3.2	Dividierte Differenzen	336
3.3	Approximation von Ableitungen mit Differenzenquotienten	340
3.3.1	Einfache Differenzenquotienten	340
3.3.2	Symmetrische Quotienten für die 1. und 2. Ableitung	341
3.3.3	Symmetrische Differenzenquotienten bis zur 6. Ableitung	341
3.3.4	Differenzenquotienten für die 1. Ableitung	342
3.3.5	Differenzenquotienten für die 2. und höhere Ableitungen	343
3.3.6	Berechnung von Ableitungen	343
3.4	Taylor-Reihen und Ableitungen	353
4	Einführung in die Numerik	355
4.1	Grundbegriffe	355
4.2	Das Eulersche Polygonzugverfahren	378
4.3	Erste Fehlerbetrachtungen	392
5	Explizite Einschrittverfahren	395
5.1	Das Konzept der Einschrittverfahren	395
5.2	Runge-Kutta-Verfahren	400
5.2.1	Parameterschemata	421
5.3	Konvergenz von Einschrittverfahren	431
5.4	Schrittweitensteuerung	440
5.4.1	Schrittweitenkontrolle mittels lokalen Diskretisierungsfehler	440
5.4.2	Schrittweitenkontrolle mittels Einbettung	454
5.4.3	Schrittweitenkontrolle mittels Schrittkenzahl	461
5.4.4	Schrittweitensteuerung mit Grob- und Feinrechnung	464
5.4.5	Variable Schrittweitensteuerung	484
6	Lineare Mehrschrittverfahren	497
6.1	Das Konzept der linearen Mehrschrittverfahren	497
6.1.1	Adams-Bashforth-Verfahren	501
6.1.2	Adams-Moulton-Verfahren	507
6.1.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	511

6.2	Die Ordnung linearer Mehrschrittverfahren	517
6.3	Homogene lineare Differenzgleichungen	523
6.4	Konsistenz und Konvergenz von Mehrschrittverfahren	528
7	Stabilität von Schrittverfahren	549
7.1	Absolute Stabilität	549
7.1.1	Stabilität und Stabilitätsgebiet von Einschrittverfahren	551
7.2	Stabilität von Mehrschrittverfahren	568
7.2.1	Stabilitätsgebiet von Mehrschrittverfahren	569
7.3	Integration steifer Systeme	606
7.3.1	Systeme mit ausgeprägter Steifheit	643
7.3.2	Steife Systeme und Linearisierung	667
8	Implizite Einschrittverfahren	673
8.1	Motivation für implizite Schrittverfahren	673
8.2	Das implizite Euler-Verfahren	675
8.3	Parameterschemata	682
8.4	Implementation ausgewählter impliziter RKV	691
8.5	Rosenbrock-Wanner-Verfahren	697
8.5.1	Einfache ROW-Verfahren	700
8.5.2	Eingebettete ROW-Verfahren	705
9	Übungsserien	719
	Index	763
	Literaturverzeichnis	767