

Gerhard Hübner

# Stochastik

Eine anwendungsorientierte Einführung  
für Informatiker, Ingenieure und Mathematiker

3., überarbeitete Auflage



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Was ist Stochastik? . . . . .	1
1.2	Anwendungsbereiche der Stochastik . . . . .	1
1.3	Modell und Realität . . . . .	3
1.4	Fragestellungen und Ziele . . . . .	4
1.5	Beschreibende Statistik . . . . .	6
1.6	Aufgaben . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Wahrscheinlichkeits-Modelle</b>	<b>11</b>
2.1	Die Modell-Bausteine . . . . .	11
2.2	Der Merkmalraum $\Omega$ . . . . .	12
2.3	Zusammengesetzte Merkmale . . . . .	13
2.4	Ereignisse . . . . .	14
2.5	Das Ereignis-System $\mathcal{A}$ . . . . .	17
2.6	Darstellung von Ereignissen durch Zufallsvariable . . . . .	19
2.7	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit . . . . .	21
2.8	Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen . . . . .	26
2.9	Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	27
2.10	Aufgaben . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Darstellungen von Wahrscheinlichkeitsmaßen</b>	<b>33</b>
3.1	Diskrete W-Maße und Zähldichten . . . . .	33
3.2	Stetige W-Maße und Riemann-Dichten . . . . .	36
3.3	Verteilungsfunktionen . . . . .	41
3.4	Aufgaben . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Mehrstufige W-Modelle, Koppelung</b>	<b>47</b>
4.1	Koppelung diskreter W-Modelle . . . . .	47
4.2	Koppelung stetiger W-Modelle . . . . .	49
4.3	Unabhängige Koppelung . . . . .	49

4.4	Markov-Koppelung . . . . .	52
4.5	Zufälliges Ziehen ohne Zurücklegen . . . . .	53
4.6	Folgen von Koppelungsmodellen . . . . .	56
4.7	Aufgaben . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Zufallsvariable und Bildmodelle</b>	<b>59</b>
5.1	Zufallsvariable und messbare Abbildungen . . . . .	59
5.2	Bildmodelle und Verteilungen von Zufallsvariablen . . . . .	60
5.3	Hypergeometrische und Binomial-Modelle . . . . .	62
5.4	Die Poisson-Approximation der Binomial-Verteilung . . . . .	64
5.5	Die Normal-Approximation der Binomial-Verteilung . . . . .	65
5.6	Wartezeiten – die geometrische Verteilung . . . . .	66
5.7	Mehrfaches Warten – die negative Binomialverteilung . . . . .	68
5.8	Bild-Verteilungen für stetige $W$ -Modelle . . . . .	69
5.9	Randverteilung und gemeinsame Verteilung . . . . .	71
5.10	Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .	74
5.11	Summen-Verteilungen und Faltung . . . . .	78
5.12	Aufgaben . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Kenngößen</b>	<b>87</b>
6.1	Modalwert, Median, Quantile . . . . .	87
6.2	Erwartungswert: Einführung . . . . .	89
6.3	Erwartungswert: diskrete Modelle . . . . .	90
6.4	Erwartungswert: stetige und gemischte Modelle . . . . .	96
6.5	Streuung und Varianz . . . . .	100
6.6	Kovarianz . . . . .	103
6.7	Mehrdimensionale Normalverteilung . . . . .	105
6.8	Zufällige Summen und bedingte Erwartungswerte . . . . .	109
6.9	Aufgaben . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Modelle für stochastische Prozesse</b>	<b>117</b>
7.1	Vorbemerkungen . . . . .	117
7.2	Markov-Ketten – einige Grundbegriffe . . . . .	118
7.3	Markov-Ketten im Gleichgewicht . . . . .	121
7.4	Aufgaben . . . . .	126

---

<b>8 Bediensysteme</b>	<b>127</b>
8.1 Vorbemerkungen	127
8.2 Das Bedienmodell $M M 1 \infty$	129
8.3 Das $M M 1$ -Bediensystem im Gleichgewicht	133
8.4 Leistungsmaße im $M M 1$ -Bediensystem	135
8.5 $M M s c$ -Bediensysteme	139
8.6 Andere Bedienzeitverteilungen	146
8.7 Gekoppelte Bediensysteme – Bediennetze	147
8.8 Bedienmodelle mit stetiger Zeit	151
8.9 Aufgaben	153
<b>9 Zufallszahlen und Simulation</b>	<b>157</b>
9.1 Vorbemerkungen	157
9.2 Erzeugen gleichverteilter Zufallszahlen	157
9.3 Zufallszahlen mit anderen Verteilungen	159
9.4 Anwendung von Simulationsverfahren	163
9.5 Aufgaben	165
<b>10 Grundfragen der Statistik</b>	<b>167</b>
10.1 Typische Problemstellungen	167
10.2 Punktschätzung	169
10.3 Intervallschätzung	171
10.4 Statistische Tests	174
10.5 Testen von Hypothesen	176
10.6 Chi-Quadrat-Anpassungstest	178
10.7 Test auf Unabhängigkeit	180
10.8 Aufgaben	181
<b>A Tabellen</b>	<b>185</b>
A.1 Die wichtigsten diskreten Verteilungen	185
A.2 Die wichtigsten stetigen Verteilungen	186
A.3 Werte der Standard-Normalverteilung	187
A.4 Quantile der Standard-Normalverteilung	188
A.5 Quantile der Student-Verteilung	188
A.6 Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	189

