

H.S.M. COXETER

# UNVERGÄNGLICHE GEOMETRIE

Ins Deutsche übersetzt von  
J.J. Burckhardt



1963

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL  
UND STUTTGART

# INHALTSVERZEICHNIS

## Teil I

<p><b>1. Dreiecke</b></p> <p>1.1 Euklid .. .. . 15</p> <p>1.2 Grundbegriffe und Axiome 16</p> <p>1.3 Die Eselsbrücke .. .. . 19</p> <p>1.4 Die Mittellinien und der Schwerpunkt .. .. . 24</p> <p>1.5 Der Inkreis und der Umkreis .. .. . 25</p> <p>1.6 Die Eulersche Gerade und der Höhenschnittpunkt .. 32</p> <p>1.7 Der Neunpunktekreis.. .. 34</p> <p>1.8 Zwei Extremalaufgaben .. 36</p> <p>1.9 Der Satz von Morley .. .. 40</p> <p><b>2. Regelmäßige Vielecke</b></p> <p>2.1 Die Kreisteilung .. .. . 43</p> <p>2.2 Die Winkeldreiteilung .. 45</p> <p>2.3 Die Bewegung.. .. . 46</p> <p>2.4 Die Symmetrie .. .. . 47</p> <p>2.5 Die Gruppen .. .. . 49</p> <p>2.6 Das Produkt zweier Spiegelungen .. .. . 51</p> <p>2.7 Das Kaleidoskop .. .. . 52</p> <p>2.8 Die Sternpolygone .. .. . 55</p> <p><b>3. Bewegungen in der Euklidischen Ebene</b></p> <p>3.1 Eigentliche und uneigentliche Bewegungen.. .. . 59</p> <p>3.2 Verschiebungen .. .. . 62</p> <p>3.3 Gleitspiegelung .. .. . 64</p> <p>3.4 Spiegelungen und Halbdrehungen.. .. . 66</p> <p>3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse über Bewegungen 67</p> <p>3.6 Der Satz von Hjelmslev 68</p> <p>3.7 Streifenmuster .. .. . 69</p>	<p><b>4. Zweidimensionale Kristallographie</b></p> <p>4.1 Gitter und ihre Dirichlet-Bereiche .. .. . 73</p> <p>4.2 Die Symmetriegruppe des allgemeinen Gitters .. .. 79</p> <p>4.3 Die Kunst von M.C. Escher 82</p> <p>4.4 Sechs Muster aus Dominos .. .. . 84</p> <p>4.5 Die Einschränkung der Kristallographie .. .. . 85</p> <p>4.6 Regelmäßige Unterteilungen .. .. . 86</p> <p>4.7 Die Aufgabe von Sylvester über kollineare Punkte .. 90</p> <p><b>5. Ähnlichkeit in der Euklidischen Ebene</b></p> <p>5.1 Streckungen .. .. . 93</p> <p>5.2 Ähnlichkeitszentrum .. .. 96</p> <p>5.3 Das Neunpunktezentrum 97</p> <p>5.4 Drehstreckung und Streckspiegelung .. .. . 98</p> <p>5.5 Eigentliche Ähnlichkeit .. 100</p> <p>5.6 Uneigentliche Ähnlichkeit 101</p> <p><b>6. Kreise und Kugeln</b></p> <p>6.1 Inversion an einem Kreis 104</p> <p>6.2 Orthogonale Kreise .. .. 107</p> <p>6.3 Inversion von Geraden und Kreisen .. .. . 108</p> <p>6.4 Die konforme Ebene .. .. 111</p> <p>6.5 Koaxiale Kreise .. .. . 114</p> <p>6.6 Der Kreis des Apollonius .. 118</p> <p>6.7 Kreiserhaltende Transformationen .. .. . 121</p> <p>6.8 Inversion an einer Kugel .. 122</p> <p>6.9 Die elliptische Ebene .. .. 123</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>7. <i>Bewegung und Ähnlichkeit im Euklidischen Raum</i></b>	<b>7.4 Das Produkt von drei Spiegelungen .. .. . 131</b>
7.1 Eigentliche und uneigentliche Bewegungen.. .. 128	7.5 Die Schraubung .. .. . 133
7.2 Die Punktspiegelung .. .. 139	7.6 Die Drehstreckung .. .. 134
7.3 Drehung und Verschiebung .. .. . 131	7.7 Kugelerhaltende Transformationen .. .. . 138

## Teil II

<b>8. <i>Koordinaten</i></b>	<b>10. <i>Die fünf Platonischen Körper</i></b>
8.1 Kartesische Koordinaten 139	10.1 Pyramiden, Prismen und Antiprismen .. .. 186
8.2 Polarkoordinaten .. .. 143	10.2 Risse und Modelle .. .. 189
8.3 Der Kreis .. .. . 146	10.3 Die Formel von Euler .. 191
8.4 Kegelschnitte .. .. . 149	10.4 Radien und Winkel .. .. 194
8.5 Tangente, Bogenlänge und Fläche .. .. . 154	10.5 Reziproke Polyeder .. .. 197
8.6 Hyperbolische Funktionen 159	<b>11. <i>Goldener Schnitt und Phyllotaxis</i></b>
8.7 Die logarithmische Spirale 160	11.1 Die Teilung nach dem Extremen und dem Mittleren .. .. . 199
8.8 Drei Dimensionen .. .. 162	11.2 De divina proportione .. 201
<b>9. <i>Komplexe Zahlen</i></b>	11.3 Die goldene Spirale .. .. 203
9.1 Rationale Zahlen .. .. . 172	11.4 Die Fibonacci Zahlen .. 205
9.2 Reelle Zahlen .. .. . 174	11.5 Phyllotaxis .. .. . 209
9.3 Das Argand-Diagramm .. 175	
9.4 Modul und Argument .. 178	
9.5 Die Formel $e^{ni} + 1 = 0$ .. 180	
9.6 Wurzeln von Gleichungen 181	
9.7 Konforme Abbildungen .. 182	

## Teil III

<b>12. <i>Anordnungsgeometrie</i></b>	<b>13.2 Streckungen .. .. . 236</b>
12.1 Die Ausscheidung zweier verschiedener Geometrien aus Euklid .. .. . 214	13.3 Affine Koordinaten .. .. 242
12.2 Die Zwischenbeziehung .. 216	13.4 Die Fläche .. .. . 247
12.3 Die Aufgabe von Sylvester über kollineare Punkte .. .. . 221	13.5 Zweidimensionale Gitter 253
12.4 Ebenen und Hyperebenen 223	13.6 Vektoren und Schwerpunkte .. .. . 258
12.5 Stetigkeit .. .. . 228	13.7 Baryzentrische Koordinaten .. .. . 262
12.6 Parallelität .. .. . 229	13.8 Der affine Raum .. .. 269
<b>13. <i>Affine Geometrie</i></b>	13.9 Dreidimensionale Gitter 272
13.1 Das Parallelenaxiom und das Axiom von Desargues .. .. . 233	<b>14. <i>Projektive Geometrie</i></b>
	14.1 Die Axiome der allgemeinen projektiven Ebene .. 279
	14.2 Projektive Koordinaten 284
	14.3 Der Satz von Desargues 289

14.4 Viereck und harmonische Beziehung .. .. .	291	15.8 Durch Inversionen erzeugte diskrete Gruppen	343
14.5 Projektivität .. .. .	294	16. <i>Hyperbolische Geometrie</i>	
14.6 Kollineationen und Korrelationen .. .. .	300	16.1 Euklidisches und hyperbolisches Parallelenaxiom	349
14.7 Der Kegelschnitt .. .. .	306	16.2 Die Frage der Widerspruchsfreiheit .. .. .	350
14.8 Der projektive Raum .. .. .	310	16.3 Der Parallelenwinkel .. .. .	354
14.9 Der Euklidische Raum .. .. .	317	16.4 Die Endlichkeit der Dreiecke .. .. .	359
15. <i>Absolute Geometrie</i>		16.5 Fläche und Winkeldefekt	360
15.1 Kongruenz .. .. .	320	16.6 Kreise, Horozykeln und äquidistante Kurven .. .. .	364
15.2 Parallelismus .. .. .	322	16.7 Poincaré's «Halbbenen»-Modell .. .. .	367
15.3 Bewegung .. .. .	326	16.8 Die Horosphäre und die Euklidische Ebene .. .. .	368
15.4 Endliche Drehgruppen	329		
15.5 Endliche Gruppen von Bewegungen .. .. .	336		
15.6 Geometrische Kristallographie .. .. .	338		
15.7 Das Polyeder-Kaleidoskop .. .. .	340		

## Teil IV

17. <i>Differentialgeometrie der Kurven</i>		19. <i>Differentialgeometrie der Flächen</i>	
17.1 Vektoren im Euklidischen Raum .. .. .	370	19.1 Die Verwendung zweier Parameter auf der Fläche	412
17.2 Vektorfunktionen und ihre Ableitungen.. .. .	376	19.2 Richtungen auf einer Fläche .. .. .	416
17.3 Krümmung, Evoluten und Evolventen .. .. .	377	19.3 Normalkrümmung .. .. .	420
17.4 Die Kettenlinie .. .. .	382	19.4 Die Hauptkrümmungen	423
17.5 Die Traktrix .. .. .	385	19.5 Hauptkrümmungsrichtungen und Krümmungslinien .. .. .	428
17.6 Die Raumkurven .. .. .	386	19.6 Nabelpunkte .. .. .	432
17.7 Die gemeine Schraubenlinie .. .. .	389	19.7 Die Sätze von Dupin und Liouville .. .. .	433
17.8 Die allgemeine Schraubenlinie .. .. .	391	19.8 Die Indikatrix von Dupin .. .. .	436
17.9 Die Schneckenlinie .. .. .	393	20. <i>Geodätische Linien</i>	
18. <i>Tensoren</i>		20.1 Theorema egregium .. .. .	439
18.1 Die duale Basis .. .. .	395	20.2 Die Differentialgleichungen für die geodätischen Linien .. .. .	424
18.2 Der Fundamentaltensor	396	20.3 Die Gesamtkrümmung eines geodätischen Dreieckes .. .. .	445
18.3 Reziproke Gitter .. .. .	399		
18.4 Das kritische Gitter einer Kugel.. .. .	403		
18.5 Allgemeine Koordinaten	406		
18.6 Das alternierende Symbol	410		

