

Vasili P. Minorski

# **Aufgabensammlung der höheren Mathematik**

Bearbeitet von Prof. Klaus Dibowski und Dr. Horst Schlegel

14., neubearbeitete Auflage

Mit 68 Bildern und 2670 Aufgaben mit Lösungen



**Fachbuchverlag Leipzig**  
im Carl Hanser Verlag

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Wiederholung Elementarmathematik</b>	<b>9</b>
0.1	Polynomdivision (Partialdivision)	9
0.2	Potenzen	9
0.3	Wurzeln	10
0.4	Logarithmen	11
0.5	Quadratische und biquadratische Gleichungen	12
0.6	Wurzelgleichungen	13
0.7	Goniometrische Gleichungen	14
<b>1</b>	<b>Einführende Grundlagen</b>	<b>16</b>
1.1	Notwendige und hinreichende Bedingungen, Beweismethoden	16
1.2	Mengen, Abbildungen, Funktionen	18
1.3	Reelle Zahlen	20
1.3.1	Darstellung reeller Zahlen	20
1.3.2	Beträge und Ungleichungen	22
1.3.3	Fakultät, Binomialkoeffizient, binomischer Lehrsatz	24
1.4	Kombinatorik	26
<b>2</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>29</b>
2.1	Darstellungsformen, Rechnen mit komplexen Zahlen	29
2.2	Horner-Schema, Vietascher Wurzelsatz	31
<b>3</b>	<b>Vektorrechnung, Analytische Geometrie</b>	<b>34</b>
3.1	Darstellung von und Rechnen mit Vektoren im $K^3$	34
3.2	Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt	37
3.3	Geradengleichung	40
3.4	Ebenengleichung	42
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>47</b>
4.1	Determinanten	47
4.2	Matrizen	49
4.3	n-dimensionaler reeller Vektorraum	52
4.4	Rang von Matrizen, Gaußscher Algorithmus	54
4.5	Lineare Gleichungssysteme	57
4.5.1	Die Cramersche Regel	57
4.5.2	Das (allgemeine) lineare Gleichungssystem (LGS)	58
4.6	Inverse Matrix (Austauschverfahren)	61
4.7	Lineare Transformationen	64
4.7.1	Affine und orthogonale Transformationen	64

# INHALTSVERZEICHNIS

4.7.2	Eigenwerte, Eigenvektoren . . . . .	66
4.7.3	Hauptachsentransformation für Kurven und Flächen 2.Ordnung . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Zahlenfolgen und Zahlenreihen</b>	<b>72</b>
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung für reelle Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>78</b>
6.1	Darstellung und Eigenschaften von Funktionen . . . . .	78
6.2	Grenzwert einer Funktion . . . . .	81
6.3	Stetigkeit einer Funktion . . . . .	83
6.4	Ableitung und Differential einer Funktion . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Mittelwertsätze der Differentialrechnung und Taylor-Formel</b>	<b>91</b>
7.1	Mittelwertsätze . . . . .	91
7.2	Grenzwertsätze von Bernoulli-l'Hospital . . . . .	92
7.3	Taylor-Formel . . . . .	93
7.4	Relative Extrema, Kurvendiskussion . . . . .	95
7.5	Newtonsches Verfahren . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Integralrechnung für reelle Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>102</b>
8.1	Unbestimmtes Integral . . . . .	102
8.1.1	Gründintegrale, Integrationsregeln . . . . .	102
8.1.2	Integration rationaler Funktionen . . . . .	107
8.1.3	Integration weiterer Funktionenklassen . . . . .	110
8.1.4	Vermischte Aufgaben zur Integration . . . . .	111
8.2	Das Riemannsches Integral . . . . .	113
8.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	116
8.4	Trapezformel, Simpsonsche Regel . . . . .	119
8.4.1	Trapezformel . . . . .	119
8.4.2	Simpsonsche Regel . . . . .	119
<b>9</b>	<b>Elemente der Differential- und Integralgeometrie</b>	<b>121</b>
9.1	Kurvendarstellungen . . . . .	121
9.2	Tangente, Krümmung ebener Kurven, Normalebene . . . . .	123
9.3	Inhalt ebener Flächen . . . . .	129
9.4	Bogenlänge eines Kurvenstückes, Krümmung von Raumkurven . . . . .	131
9.5	Volumen, Mantelfläche von Rotationskörpern . . . . .	137
9.6	Aufgaben aus der Physik . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Funktionenreihen</b>	<b>142</b>
10.1	Grundbegriffe . . . . .	142
10.2	Potenzreihen und Taylor-Reihen . . . . .	144
10.3	Fourier-Reihen . . . . .	148

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>11</b>	<b>Differentialrechnung für reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>151</b>
11.1	Niveaulinien, -flächen, -hyperflächen . . . . .	151
11.2	Grenzwert, Stetigkeit . . . . .	152
11.3	Partielle Ableitung, Gradient, Richtungsableitung . . . . .	154
11.4	Zerlegungssatz, totales Differential . . . . .	157
11.5	Fehlerrechnung . . . . .	159
11.6	Tangentialebene, Flächennormale . . . . .	161
11.7	Kettenregel . . . . .	162
11.8	Taylor-Formel . . . . .	165
11.9	Lokale Extrema . . . . .	166
11.10	Extrema bei Nebenbedingungen in Gleichungsform . . . . .	168
<b>12</b>	<b>Bereichs- und Mehrfachintegrale</b>	<b>171</b>
12.1	Integrale über ebene Bereiche (Flächenintegrale) . . . . .	171
12.2	Integrale über räumliche Bereiche (Raumintegrale) . . . . .	174
12.3	Substitution . . . . .	176
<b>13</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>181</b>
13.1	Begriff der Differentialgleichung . . . . .	181
13.2	Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	182
13.2.1	Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen . . . . .	182
13.2.2	Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen . . . . .	185
13.2.3	Lineare Differentialgleichungen (Variation der Konstanten) . . . . .	187
13.2.4	Bernoullische Differentialgleichungen . . . . .	189
13.2.5	Exakte Differentialgleichungen, integrierender Faktor . . . . .	189
13.3	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	191
13.3.1	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	191
13.3.2	Eulersche Differentialgleichungen . . . . .	196
13.4	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	197
13.5	Näherungsmethoden . . . . .	199
13.5.1	Potenzreihenansatz . . . . .	199
13.5.2	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	199
<b>14</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>202</b>
14.1	Felder, Differentialoperatoren . . . . .	202
14.2	Kurvenintegrale . . . . .	205
14.3	Oberflächenintegrale . . . . .	211
14.4	Integralsätze . . . . .	214
	<b>Lösungen</b>	<b>219</b>