

Vorlesungen über Mathematische Statistik

Von apl. Prof. Dr. Helmut Pruscha
Universität München



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2000

ULB Darmstadt



16240079

Inhalt

0	Einleitung	13
I	Grundlegende Verfahren	17
1	Schätzen von Parametern ⁽⁰⁾	17
1.1	Begriff und Eigenschaften des Schätzers	17
1.2	Schätzen des Erwartungswerts und der Varianz	19
1.3	Satz von Student (Normalverteilungs-Fall)	20
2	Schätzmethoden ⁽⁰⁾	23
2.1	ML-Schätzer	24
2.2	Beispiele von ML-Schätzern	25
2.3	MQ-Schätzer	27
2.4	MQ-Schätzer des Regressionskoeffizienten	28
3	Testen von Parametern ⁽⁰⁾	29
3.1	Signifikanztest zum Niveau α	30
3.2	Fehlerwahrscheinlichkeiten, Gütefunktion	31
3.3	Beispiel Gaußtests	32
3.4	Beispiel t -Tests	33
3.5	Beispiel Binomialtests	35
4	Konfidenzintervalle ⁽⁰⁾	37
4.1	Begriff des Konfidenzbereichs	38
4.2	Beispiel: Konfidenzintervall für μ einer $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung	39
4.3	Beispiel: Konfidenzintervall für p einer $B(n, p)$ -Verteilung .	41
5	Ordnungs- und Rangstatistiken ⁽⁰⁾	44
5.1	Ordnungstatistik	44
5.2	Ränge	45
5.3	Empirische Verteilungsfunktion	46
5.4	Schätzer und Konfidenzintervall für ein Quantil	48
6	Resampling Methoden ^(*)	49
6.1	Jackknife Varianzschätzer	50
6.2	Jackknife Biasschätzer	51
6.3	Bootstrap Varianzschätzer	53
6.4	Bootstrap Methoden	54
7	Exkurs: Testverteilungen ⁽⁰⁾	56

7.1	χ^2 -Verteilung	56
7.2	t -Verteilung	57
7.3	F -Verteilung	59
II Grundlegende Konzepte		63
1	Verteilungsklassen	63
1.1	Stichprobenraum, Verteilungsannahme, Stichprobenfunktion ⁽⁰⁾	64
1.2	Dominierte Verteilungsklassen	65
1.3	Ein Kriterium der Dominiiertheit	66
2	Exponentialfamilien ⁽⁰⁾	67
2.1	Einparametrische Exponentialfamilien	67
2.2	k -parametrische Exponentialfamilien	68
2.3	Ableitungen und Momente	70
2.4	Beispiele für Exponentialfamilien	71
3	Suffizienz und Vollständigkeit	74
3.1	Suffiziente Statistiken	74
3.2	Erste Beispiele und Folgerungen	76
3.3	Neyman-Kriterium	77
3.4	Suffiziente Statistiken in Exponentialfamilien	80
3.5	Vollständige Statistiken	81
4	Entscheidungstheorie	83
4.1	Verlustfunktion und Risiko	84
4.2	Suffizienz und Risiko (*)	86
4.3	Entscheidungsstrategien	87
4.4	Bayessche Entscheidungstheorie	88
4.5	„Bayessches Theorem“, Beispiel (*)	90
5	Exkurs: Bedingte Erwartungen und Verteilungen	93
5.1	Bedingte Erwartungen	93
5.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen	94
5.3	Bedingte Dichten	96
III Lineares Modell		97
1	Grundlagen des linearen Modells ⁽⁰⁾	97
1.1	Einführung: Regressions- und Varianzanalyse	98
1.2	Elemente und Definition des linearen Modells	101
1.3	Linearer Teilraum $L = \mathcal{L}(X)$, Projektionen	102
1.4	Projektion und Projektionsstrahl	104
2	Spezialfälle des linearen Modells ⁽⁰⁾	106
2.1	Lineare Regression	106
2.2	Einfache Varianzanalyse	107
2.3	Zweifache Varianzanalyse	109
2.4	Weitere spezielle lineare Modelle (*)	111

3	MQ-Schätzer der Modellparameter (⁰)	112
3.1	Erwartungswerte μ , Regressionskoeffizienten β	113
3.2	Konsistenz und asymptotische Normalität von $\hat{\beta}$ (*)	115
3.3	Schätzen der Varianz σ^2 , Residuen	117
3.4	Beispiel: Einfache lineare Regression und Varianzanalyse	118
4	Lineare Schätzer: Verteilung, Konfidenzintervalle	121
4.1	Schätzbare Funktionen	122
4.2	Gauß-Markov Theorem	123
4.3	Beispiel: Einfache Varianzanalyse	124
4.4	Verteilung des GM-Schätzers	126
4.5	Simultane Konfidenzintervalle nach Scheffé (*)	128
4.6	Beispiel: Einfache Varianzanalyse (*)	130
5	Testen linearer Hypothesen (⁰)	131
5.1	Hypothesenraum L_H , Hypothesenmatrix H	132
5.2	Hauptsatz über das Testen linearer Hypothesen	133
5.3	Bemerkungen und Ergänzungen zum Hauptsatz	135
5.4	Beispiele: Einfache Varianz- und Regressionanalyse	138
IV Einfache nichtparametrische Modelle		141
1	Auf Rängen basierende Statistiken (⁰)	141
1.1	Verteilung des Rangvektors	142
1.2	2-Stichproben Rangsummen	144
1.3	Verteilung der Rangsummen	145
1.4	2-Stichproben U-Test	147
1.5	Absolute und Vorzeichen-Ränge	149
1.6	Verteilung der Vorzeichen-Rang Summe	151
1.7	1-Stichproben Wilcoxon-Test	152
2	Auf der empirischen Verteilungsfunktion basierende Statistiken (⁰)	154
2.1	KS-Statistik d_n	154
2.2	1-Stichproben KS-Test	157
2.3	2-Stichproben KS-Test (*)	159
2.4	Exkurs: Verteilungsfunktionen und ihr Inverses	161
3	U-Statistiken und ihre asymptotische Normalität	162
3.1	U-Statistiken	162
3.2	Varianz einer U-Statistik	164
3.3	Beispiele von U-Statistiken	166
3.4	H-Projektionen von U-Statistiken	168
3.5	Asymptotische Normalität von U-Statistiken	170
V Schätztheorie		173
1	Cramér-Rao Ungleichung und Effizienz (⁰)	173
1.1	Reguläre Verteilungsklassen	174
1.2	Reguläre Schätzfunktionen, Strukturlemma	176

	1.3	Cramér-Rao Ungleichung	177
	1.4	Effizienz von Schätzfunktionen	179
	1.5	Beispiel Normalverteilung	182
2		Optimale erwartungstreue Schätzer	183
	2.1	Erwartungstreue Schätzer und ihre Verbesserung	183
	2.2	Beste Schätzfunktion	184
3		Asymptotische Lösungen von Schätzgleichungen	186
	3.1	Schätzgleichungen, Z-Schätzer	187
	3.2	Existenz eines konsistenten Z-Schätzers	189
	3.3	Bedingungen zur asymptotischen Normalität	192
	3.4	Asymptotische Normalität	194
	3.5	Weitere Konvergenzaussagen, Konfidenzintervalle	195
	3.6	Spezialfall unabhängiger Zufallsvariabler	198
	3.7	Spezialfall eines deterministischen W_n (*)	201
4		Bootstrap-Schätzer	203
	4.1	Verteilungsfunktion einer Statistik	204
	4.2	ZGWS und Konvergenzgeschwindigkeiten	206
	4.3	ZGWS für Funktionen des Mittelwertes	208
	4.4	Konsistenz von $H_{n,boot}$ und Anpassungsgüte	210
	4.5	Konsistenz des Varianzschätzers (*)	211
	4.6	Konfidenzintervalle	215
VI Testtheorie			219
1		Randomisierte Tests und einfache Hypothesen ⁽⁰⁾	220
	1.1	Beste Tests zum Niveau α	220
	1.2	Neyman-Pearson Tests (bei einfachen Hypothesen)	222
	1.3	Fundamentallemma von Neyman-Pearson	224
2		Einseitige und zweiseitige Tests	226
	2.1	Verteilungsklasse mit monotonem Dichtequotienten	227
	2.2	Beste einseitige Tests bei monotonem Dichtequotienten	229
	2.3	Unverfälschte zweiseitige Tests	231
	2.4	Modifizierte NP-Tests	233
	2.5	Beste unverfälschte Tests	235
3		Testprobleme mit Störparametern	237
	3.1	Ähnliche Tests, Tests mit Neyman-Struktur	237
	3.2	Bedingte Testprobleme	240
	3.3	Von bedingten zu unbedingten Tests	242
	3.4	Beste Tests mit Störparametern	243
	3.5	Beispiel t-Tests	246
4		Asymptotische parametrische Tests	247
	4.1	Tests einfacher Nullhypothesen	248
	4.2	Teilfamilien bei zusammengesetzten Hypothesen	251
	4.3	Asymptotisches χ^2 des log-LQ	253

4.4	Asymptotisches χ^2 des Wald-Tests	256
4.5	Vergleich der Tests zusammengesetzter Hypothesen	259
4.6	Pearson-Teststatistik	260
4.7	Pearson-Fisher Teststatistik	263
4.8	Anwendungen: Asymptotische χ^2 -Tests	265

VII Nichtlineare Modelle 269

1	Nichtlineares Regressionsmodell	270
1.1	Modellgleichung und Schätzgleichung	270
1.2	Asymptotische Regularitätsvoraussetzungen	272
1.3	Asymptotische Eigenschaften des MQ-Schätzers, Wald-Test	274
1.4	Spezielle Hypothese, Beispiel der nichtlinearen Regression	276
2	Verallgemeinertes lineares Modell (GLM)	277
2.1	Elemente eines GLM	278
2.2	Definition, Verknüpfung der Parameter	279
2.3	Scorefunktion, Informationsmatrix	281
2.4	Spezielle GLMs	284
2.5	ML-Schätzer für β	287
2.6	Asymptotische ML-Theorie	288
2.7	Weitere hinreichende Bedingungen	290

VIII Nichtparametrische Kurvenschätzer 293

1	Dichteschätzer	294
1.1	Orthogonalreihen-Schätzer $\hat{f}_{n,N}$	294
1.2	Erste Eigenschaften von $\hat{f}_{n,N}$, Beispiel	295
1.3	Konsistenz von $\hat{f}_{n,N}$	298
1.4	Histogramm \rightarrow Naiver Schätzer \rightarrow Kernschätzer	301
1.5	Erste Eigenschaften von $\hat{f}_{n,h}$, Lemma von Parzen	303
1.6	Konvergenzordnung des MISE $J_{n,h}$	305
1.7	Bandbreite, Cross-Validation, Optimaler Kern	308
2	Regressionskurven-Schätzer	311
2.1	Kernschätzer $\hat{\mu}_{n,h}$	312
2.2	Konvergenzordnung des MSE $J_{n,h}(x)$	314
2.3	Konvergenzverhalten des Kernschätzers $\hat{\mu}_{n,h}(x)$	317
2.4	Splineschätzer $\hat{\mu}_{n,\lambda}$	319
2.5	Existenz- und Eindeutigkeitssatz, Grenzfälle	322
2.6	Weitere Ergebnisse für Splineschätzer (*)	324
2.7	Exkurs: Natürliche Splines	327

A Ergänzungen aus linearer Algebra, Analysis und Stochastik 335

1	Matrizen	335
1.1	Projektionsmatrizen	335
1.2	Ellipsoide	336

1.3	Ableitungsvektoren und -Matrizen	337
2	Mehrdimensionale Normalverteilung	338
2.1	Definition, Standardisierung, Charakterisierung	339
2.2	Linearformen	340
2.3	Quadratische Formen	341
3	Grenzwertsätze	341
3.1	Fast sichere und stochastische Konvergenz	341
3.2	L_p -Konvergenz, Stochastische Beschränktheit	342
3.3	Gesetze der großen Zahlen	343
3.4	Konvergenz in Verteilung	344
3.5	Univariate zentrale Grenzwertsätze	347
3.6	Multivariate zentrale Grenzwertsätze	349
	Literaturverzeichnis	351
	Index	357