

**Bernd Girod, Rudolf Rabenstein,
Alexander Stenger**

Einführung in die Systemtheorie

**Signale und Systeme
in der Elektrotechnik
und Informationstechnik**

2., korrigierte und aktualisierte Auflage

Mit 388 Abbildungen und 113 Beispielen sowie
200 Übungsaufgaben mit Lösungen



Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Signale	1
1.2	Systeme	5
1.2.1	Was ist ein System?	5
1.2.2	Der Anspruch der Systemtheorie	7
1.2.3	Lineare, zeitinvariante Systeme	7
1.2.3.1	Linearität eines Systems	7
1.2.3.2	Zeitinvarianz eines Systems	9
1.2.3.3	LTI-Systeme	10
1.2.4	Beispiele für Systeme	10
1.2.4.1	Elektrische Netzwerke	10
1.2.4.2	Weitere Beispiele für Systeme	11
1.2.5	Einteilung von Systemen	12
1.3	Übersicht über dieses Buch	13
1.4	Aufgaben	14
2	Beschreibung kontinuierlicher LTI-Systeme im Zeitbereich	17
2.1	Differentialgleichungen	17
2.1.1	Systemanalyse	17
2.1.2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	18
2.2	Blockdiagramme	19
2.2.1	Direktform I	20
2.2.2	Direktform II	20
2.2.3	Direktform III	24
2.2.4	Warum realisiert man LTI-Systeme nicht mit Differenzierern?	26
2.2.5	Elektrische Realisierung eines Integrierers mit einem Operationsverstärker	27
2.3	Zustandsraumbeschreibung von LTI-Systemen	29
2.3.1	Beispiel zur Zustandsraumbeschreibung	29
2.3.2	Allgemeine Form der Zustandsraumbeschreibung	30
2.4	Differentialgleichung, Blockdiagramm und Zustandsraumbeschreibung	31
2.5	Äquivalente Zustandsraumdarstellungen	33
2.6	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	35

2.7	Zusammenfassung	37
2.8	Aufgaben	40
3	Beschreibung von LTI-Systemen im Frequenzbereich	43
3.1	Komplexe Frequenzen	44
3.1.1	Was ist eine komplexe Frequenz?	44
3.1.2	Komplexe Frequenz: Beispielsignale	44
3.1.3	Die komplexe Frequenz-Ebene	45
3.2	Eigenfunktionen	46
3.2.1	Was sind Eigenfunktionen?	46
3.2.2	Eigenfunktionen von LTI-Systemen	48
3.2.3	Beispiel: RLC-Netzwerk	49
3.2.4	Impedanz	51
3.2.5	Normierung	52
3.3	Aufgaben	56
4	Laplace-Transformation	58
4.1	Verallgemeinerung des Eigenfunktionsansatzes	58
4.2	Definition der Laplace-Transformation	58
4.3	Einseitige und zweiseitige Laplace-Transformation	60
4.4	Beispiele zur Laplace-Transformation	61
4.5	Konvergenzbereich der Laplace-Transformation	64
4.5.1	Uneigentliche Integrale	65
4.5.2	Singularitäten	65
4.5.3	Eigenschaften des Konvergenzbereichs	67
4.6	Existenz und Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten	68
4.6.1	Existenz der Laplace-Transformierten	68
4.6.2	Eindeutigkeit der inversen Laplace-Transformation	70
4.7	Eigenschaften und Sätze der Laplace-Transformation	72
4.7.1	Linearität der Laplace-Transformation	72
4.7.2	Verschiebung im Zeitbereich oder Frequenzbereich	73
4.7.3	Skalierung der Zeitachse oder der Frequenzebene	73
4.7.4	Differentiation und Integration im Zeitbereich	74
4.7.5	Differentiationssatz und Integrationssatz für die einseitige Laplace-Transformation	74
4.7.6	Differentiationssatz für stückweise glatte Signale	76
4.7.7	Differentiation im Frequenzbereich	79
4.7.8	Tabelle der wichtigsten Laplace-Transformierten	79
4.8	Aufgaben	80
5	Komplexe Funktionentheorie und inverse Laplace-Transformation	82
5.1	Wegintegral in der komplexen Ebene	82
5.2	Hauptsatz der Funktionentheorie	83
5.3	Ringintegrale um Singularitäten	84
5.4	Integralformel von Cauchy	86

5.4.1	Residuenberechnung	87
5.4.2	Integration parallel zur imaginären Achse	88
5.4.3	Bedeutung der Integralformel von Cauchy	90
5.5	Inverse Laplace-Transformation	90
5.5.1	Inverse einseitige Laplace-Transformation	90
5.5.2	Inverse zweiseitige Laplace-Transformation	91
5.5.3	Integrationsweg für die inverse Laplace-Transformation	92
5.5.4	Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit dem Residuensatz	93
5.5.5	Praktische Berechnung der inversen Laplace-Transformation	96
5.6	Aufgaben	98
6	Analyse zeitkontinuierlicher LTI-Systeme mit der Laplace-Transformation	100
6.1	Systemreaktion auf zweiseitige Eingangssignale	100
6.2	Berechnung der Systemfunktion	102
6.3	Pole und Nullstellen der Systemfunktion	105
6.4	Berechnung der Systemfunktion aus Differentialgleichungen	107
6.5	Zusammenfassendes Beispiel	108
6.6	Kombination von einfachen LTI-Systemen	110
6.6.1	Reihenschaltung	110
6.6.2	Parallelschaltung	111
6.6.3	Rückkopplung	111
6.7	Kombination von LTI-Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen	113
6.7.1	Reihenschaltung	114
6.7.2	Parallelschaltung	114
6.7.3	Rückkopplung	115
6.8	Analyse von Zustandsraumbeschreibungen	116
6.9	Aufgaben	118
7	Lösung von Anfangswertproblemen mit der Laplace-Transformation	120
7.1	Systeme erster Ordnung	120
7.1.1	Klassische Lösung von Anfangswertproblemen	121
7.1.2	Externer und interner Anteil der Lösung	122
7.1.3	Anfangswert und Anfangszustand	124
7.1.4	Beispiel: Anfangswertproblem mit harmonischer Erregung	127
7.1.5	Zusammenfassung	130
7.2	Systeme zweiter Ordnung	130
7.3	Systeme höherer Ordnung	132
7.3.1	Lösung der Zustandsraumdifferentialgleichung	132
7.3.2	Berechnung des Anfangszustands aus den Anfangswerten	137
7.3.3	Berechnung des internen Anteils im Zeitbereich	139
7.4	Bewertung der Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen	142
7.5	Linearität von Systemen mit Anfangszustand	144
7.6	Aufgaben	145

8	Faltung und Impulsantwort	147
8.1	Motivation	147
8.2	Zeitverhalten eines RC-Netzwerks	148
8.2.1	Systemfunktion	148
8.2.2	Reaktion auf einen Rechteckimpuls	149
8.2.3	Reaktion auf sehr kurze Rechteckimpulse	150
8.3	Der Delta-Impuls	151
8.3.1	Einführung	151
8.3.2	Ausblendeigenschaft	152
8.3.3	Impulsantwort	153
8.3.4	Rechenregeln für Delta-Impulse	154
8.3.4.1	Linearkombination von Delta-Impulsen	154
8.3.4.2	Skalierung der Zeitachse	154
8.3.4.3	Multiplikation mit einer stetigen Funktion	155
8.3.4.4	Derivation	156
8.3.4.5	Integration	157
8.3.5	Anwendung von Delta-Impulsen	158
8.4	Faltung	160
8.4.1	Systembeschreibung durch Impulsantwort	160
8.4.2	Impulsantwort und Systemfunktion	162
8.4.3	Berechnung des Faltungsintegrals	165
8.4.4	Impulsantworten spezieller Systeme	167
8.4.4.1	Integrierer	167
8.4.4.2	Differenzierer	168
8.4.4.3	Verzögerungsglieder	169
8.4.4.4	Bausteine der Regelungstechnik	171
8.4.5	Kombination einfacher LTI-Systeme	172
8.4.6	Faltung durch Hinschauen	174
8.5	Anwendungen	180
8.5.1	Suchfilter (Matched Filter)	180
8.5.2	Entfaltung	182
8.6	Aufgaben	184
9	Fourier-Transformation	186
9.1	Rückblick auf die Laplace-Transformation	186
9.2	Definition der Fourier-Transformation	187
9.2.1	Hintransformation	187
9.2.2	Existenz der Fourier-Transformation	188
9.3	Unterschiede zwischen Fourier- und Laplace-Transformation	189
9.4	Beispiele zur Fourier-Transformation	191
9.4.1	Fourier-Transformierte des Delta-Impulses	191
9.4.2	Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion	192
9.4.3	Fourier-Transformierte einer komplexen Exponentialfunktion	196
9.4.4	Fourier-Transformierte von $\frac{1}{t}$	198
9.5	Symmetrien der Fourier-Transformation	199

9.5.1	Gerade und ungerade Funktionen	200
9.5.2	Konjugierte Symmetrie	201
9.5.3	Symmetriebeziehungen für reellwertige Zeitsignale	201
9.5.4	Symmetriebeziehungen für imaginäre Zeitsignale	203
9.5.5	Symmetriebeziehungen für komplexwertige Signale	203
9.6	Inverse Fourier-Transformation	204
9.7	Sätze zur Fourier-Transformation	205
9.7.1	Linearität der Fourier-Transformation	206
9.7.2	Ähnlichkeitssatz	206
9.7.3	Dualität	207
9.7.4	Faltungssatz der Fourier-Transformation	211
9.7.5	Multiplikationssatz	213
9.7.6	Verschiebungssatz und Modulationssatz	216
9.7.7	Differentiationssätze	217
9.7.8	Integrationsatz	218
9.8	Parsevalsches Theorem	219
9.9	Korrelation deterministischer Signale	221
9.9.1	Definition	221
9.9.2	Eigenschaften	222
9.9.2.1	Zusammenhang mit der Faltung	222
9.9.2.2	Symmetrie	223
9.9.2.3	Kommutativität	223
9.9.2.4	Fourier-Transformierte von Korrelationsfunktionen	223
9.10	Zeit-Bandbreite-Produkt	225
9.10.1	Flächengleiches Rechteck	225
9.10.2	Toleranzschemata	227
9.10.3	Momente zweiter Ordnung	228
9.10.4	Zusammenfassung	229
9.11	Aufgaben	230
10	Bode-Diagramme	233
10.1	Einführung	233
10.2	Beiträge einzelner reeller Pole und Nullstellen	234
10.3	Bode-Diagramm für mehrere reelle Pole und Nullstellen	237
10.4	Regeln für Bode-Diagramme	239
10.4.1	Betragsfrequenzgang	240
10.4.2	Phasenverlauf	240
10.5	Komplexe Pol- und Nullstellenpaare	241
10.6	Aufgaben	246
11	Abtastung und periodische Signale	251
11.1	Einleitung	251
11.2	Delta-Impulskamm und periodische Funktionen	252
11.2.1	Delta-Impulskamm und seine Fourier-Transformierte	252
11.2.2	Fourier-Transformierte periodischer Signale	254

11.2.3	Faltung eines periodischen und eines aperiodischen Signals	256
11.2.4	Periodische Faltung	258
11.3	Abtastung	259
11.3.1	Ideale Abtastung	259
11.3.2	Abtasttheorem	260
11.3.3	Abtasttheorem für komplexwertige Bandpaß-Signale	264
11.3.4	Abtasttheorem für reellwertige Bandpaß-Signale	266
11.3.5	Nichtideale Abtastung	269
11.3.6	Nichtideale Rekonstruktion	272
11.3.7	Abtastung im Frequenzbereich	275
11.4	Aufgaben	276
12	Diskrete Signale und ihr Spektrum	284
12.1	Diskrete Signale	284
12.2	Einfache Zahlenfolgen	285
12.2.1	Diskreter Einheitsimpuls	286
12.2.2	Diskreter Einheitssprung	287
12.2.3	Exponentialfolgen	287
12.3	Fourier-Transformierte einer Folge	289
12.3.1	Definition der \mathcal{F}_* -Transformation	290
12.3.2	Inverse \mathcal{F}_* -Transformation	290
12.3.3	Korrespondenzen der \mathcal{F}_* -Transformation	290
12.3.3.1	\mathcal{F}_* -Transformierte des diskreten Einheitsimpulses	291
12.3.3.2	\mathcal{F}_* -Transformierte der ungedämpften komplexen Exponentialfolge	291
12.3.3.3	\mathcal{F}_* -Transformierte des diskreten Einheitssprungs	292
12.3.3.4	\mathcal{F}_* -Transformierte einseitiger Exponentialfolgen	293
12.3.3.5	\mathcal{F}_* -Transformation einer Rechteckfolge	293
12.4	Abtastung kontinuierlicher Signale	294
12.5	Sätze der \mathcal{F}_* -Transformation	296
12.5.1	Linearität	296
12.5.2	Verschiebungs- und Modulationssatz	296
12.5.3	Faltungssatz der \mathcal{F}_* -Transformation	297
12.5.4	Multiplikationssatz	297
12.5.5	Satz von Parseval	298
12.5.6	Symmetrien der Fourier-Transformation diskreter Signale	298
12.6	Aufgaben	300
13	z-Transformation	303
13.1	Definition und Beispiele	303
13.1.1	Definition der zweiseitigen z -Transformation	303
13.1.2	Beispiele zur z -Transformation	304
13.1.3	Anschauliche Deutung der z -Ebene	307
13.2	Konvergenzbereich der z -Transformation	307
13.3	Beziehungen zu anderen Transformationen	310

13.3.1	z -Transformation und Fourier-Transformation von Folgen	310
13.3.2	z -Transformation und Laplace-Transformation	312
13.4	Sätze der z -Transformation	314
13.5	Inverse z -Transformation	316
13.6	Pol-Nullstellen-Diagramm in der z -Ebene	319
13.7	Aufgaben	321
14	Zeitdiskrete LTI-Systeme	325
14.1	Einführung	325
14.2	Linearität und Zeitinvarianz	325
14.3	Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	326
14.3.1	Differenzgleichungen und Differentialgleichungen	326
14.3.2	Lösung von linearen Differenzgleichungen	327
14.3.2.1	Numerische Lösung	327
14.3.2.2	Analytische Lösung	327
14.4	Eigenfolgen und Systemfunktion diskreter LTI-Systeme	327
14.4.1	Eigenfolgen	327
14.4.2	Systemfunktion	329
14.4.3	Berechnung der Systemfunktion aus der Differenzgleichung	330
14.5	Beschreibung durch Blockdiagramme und im Zustandsraum	332
14.5.1	Direktform I	332
14.5.2	Direktform II	333
14.5.3	Zustandsraumbeschreibung diskreter LTI-Systeme	333
14.6	Diskrete Faltung und Impulsantwort	336
14.6.1	Berechnung der Systemreaktion durch diskrete Faltung	337
14.6.2	Faltungssatz der z -Transformation	338
14.6.3	Systeme mit endlich und unendlich langer Impulsantwort	339
14.6.4	Berechnung der diskreten Faltung	342
14.7	Aufgaben	346
15	Kausalität und Hilbert-Transformation	352
15.1	Kausale Systeme	352
15.1.1	Allgemeine Systeme	353
15.1.2	Lineare Systeme	353
15.1.3	LTI-Systeme	354
15.2	Kausale Signale	355
15.2.1	Zeitbereich	355
15.2.2	Spektren kausaler Signale	356
15.2.2.1	Kontinuierliche Signale	356
15.2.2.2	Diskrete Signale	357
15.3	Analytisches Signal	359
15.4	Aufgaben	363

16 Stabilität und rückgekoppelte Systeme	366
16.1 BIBO, Impulsantwort und Frequenzgang	366
16.1.1 Kontinuierliche LTI-Systeme	367
16.1.2 Diskrete Systeme	368
16.1.3 Beispiele	368
16.2 Kausale stabile LTI-Systeme	371
16.2.1 Allgemeine Eigenschaften	371
16.2.1.1 Kontinuierliche Systeme	371
16.2.1.2 Diskrete Systeme	371
16.2.2 LTI-Systeme mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion	372
16.2.2.1 Kontinuierliche Systeme	372
16.2.2.2 Diskrete Systeme	373
16.2.3 Stabilitätskriterien	373
16.2.3.1 Kontinuierliche Systeme	374
16.2.3.2 Diskrete Systeme	375
16.3 Rückgekoppelte Systeme	377
16.3.1 Invertierung eines Systems durch Rückkopplung	378
16.3.2 Glättung des Frequenzgangs durch Gegenkopplung	379
16.3.3 Stabilisierung eines Systems durch Rückkopplung	379
16.3.4 Regelkreise	382
16.4 Aufgaben	384
17 Beschreibung von Zufallssignalen	387
17.1 Einleitung	387
17.1.1 Was sind Zufallssignale?	388
17.1.2 Wie beschreibt man Zufallssignale?	388
17.2 Erwartungswerte	389
17.2.1 Erwartungswert als Scharmittelwert	389
17.2.2 Erwartungswerte erster Ordnung	391
17.2.3 Rechnen mit Erwartungswerten	393
17.2.4 Erwartungswerte zweiter Ordnung	394
17.3 Stationäre Zufallsprozesse	395
17.3.1 Definition	396
17.3.2 Ergodische Zufallsprozesse	398
17.4 Korrelationsfunktionen	400
17.4.1 Korrelationsfunktionen reeller Signale	401
17.4.1.1 Autokorrelationsfunktion	401
17.4.1.2 Autokovarianzfunktion	404
17.4.1.3 Kreuzkorrelationsfunktion	405
17.4.1.4 Kreuzkovarianzfunktion	406
17.4.2 Korrelationsfunktionen komplexwertiger Signale	407
17.4.2.1 Kreuzkorrelationsfunktion	407
17.4.2.2 Autokorrelationsfunktion	408
17.4.2.3 Kreuzkovarianz- und Autokovarianzfunktion	408
17.5 Leistungsdichtespektren	409

17.5.1	Definition	410
17.5.2	Leistungsdichtespektrum und quadratischer Mittelwert	411
17.5.3	Symmetrieeigenschaften des Leistungsdichtespektrums	411
17.5.4	Weißes Rauschen	412
17.6	Beschreibung diskreter Zufallssignale	414
17.7	Aufgaben	415
18	Zufallssignale und LTI-Systeme	420
18.1	Verknüpfungen von Zufallssignalen	420
18.1.1	Multiplikation von Zufallssignalen mit einem Faktor	420
18.1.2	Addition von Zufallssignalen	421
18.1.2.1	Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichtespektrum	422
18.1.2.2	Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzleistungsdichte- spektrum	423
18.2	Reaktion von LTI-Systemen auf Zufallssignale	424
18.2.1	Stationarität und Ergodizität	424
18.2.2	Linearer Mittelwert am Ausgang eines LTI-Systems	425
18.2.3	Autokorrelationsfunktion am Ausgang eines LTI-Systems	426
18.2.4	Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Eingang und Ausgang eines LTI-Systems	428
18.2.5	Leistungsdichtespektrum und LTI-System	430
18.2.6	Deutung des Leistungsdichtespektrums	432
18.2.7	Messung des Übertragungsverhaltens eines LTI-Systems	433
18.3	Signalschätzung durch Wiener-Filter	435
18.3.1	Herleitung der Übertragungsfunktion des Wiener-Filters	436
18.3.1.1	Lineare Verzerrungen und additives Rauschen	438
18.3.1.2	Ideale Übertragung und additives Rauschen	438
18.3.1.3	Lineare Verzerrungen ohne Rauschen	439
18.4	Aufgaben	440
A	Lösungen der Aufgaben	446
B	Korrespondenzen-Tabellen	537
B.1	Korrespondenzen der zweiseitigen Laplace-Transformation	537
B.2	Sätze der zweiseitigen Laplace-Transformation	538
B.3	Korrespondenzen der Fourier-Transformation	539
B.4	Sätze der Fourier-Transformation	540
B.5	Korrespondenzen der zweiseitigen z -Transformation	541
B.6	Sätze der zweiseitigen z -Transformation	542
B.7	Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Folgen	543
B.8	Sätze der Fourier-Transformation von Folgen	544
	Literaturverzeichnis	545
	Index	547