

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort: Mathematik – eine Mutfrage?</b> .....	v
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	viii
<b>1 Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können</b> .....	1
1.1 Mengen .....	1
1.2 Äquivalenzrelationen .....	4
1.3 Abbildungen.....	6
1.4 Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente? .....	11
1.5 Die $\Sigma$ -Notation .....	16
1.6 Beweisprinzipien.....	18
Richtig oder falsch? .....	19
Übungsaufgaben .....	20
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	23
Was sagen Sie dazu?.....	23
<b>2 Körper</b> .....	24
2.1 Die Definition .....	24
2.2 Beispiele von Körpern .....	27
2.2.1 Der Körper der komplexen Zahlen .....	27
2.2.2 Der Quaternionenschiefkörper .....	30
2.2.3 Einige endliche Körper .....	33
2.3 Automorphismen von Körpern .....	39
2.3.1 Die Definitionen .....	39
2.3.2 Der Körper der rationalen Zahlen.....	40
2.3.3 Der Körper der reellen Zahlen.....	41
2.3.4 Konjugiert-komplexe Zahlen.....	42
Richtig oder falsch? .....	43
Übungsaufgaben .....	44
Projekt: Die Gaußsche Zahlenebene.....	46
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	47
<b>3 Vektorräume</b> .....	48
3.1 Die Definition .....	48
3.2 Beispiele von Vektorräumen.....	50
3.2.1 Vektorräume mit Hilfe von Geometrie.....	50
3.2.2 Der Vektorraum $K^n$ .....	50
3.2.3 Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen.....	50
3.2.4 Der Vektorraum aller unendlichen Folgen .....	51

3.2.5 Ein Vektorraum unendlicher Folgen .....	52
3.2.6 Vektorräume von Funktionen .....	52
3.2.7 Lösungen eines Gleichungssystems .....	52
3.2.8 Teilmengen einer Menge .....	52
3.2.9 Körper als Vektorräume .....	53
<b>3.3 Elementare Theorie der Vektorräume .....</b>	<b>54</b>
3.3.1 Der Begriff der Basis .....	54
3.3.2 Der Steinitzsche Austauschsatz .....	61
3.3.3 Der Dimensionssatz .....	67
3.3.4 Faktorräume .....	69
<b>3.4 Zur Geschichte der linearen Algebra .....</b>	<b>75</b>
Richtig oder falsch? .....	77
Übungsaufgaben .....	79
Projekt: Der unendlichdimensionale Vektorraum $V_\infty$ .....	84
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	86
<b>4 Anwendungen von Vektorräumen .....</b>	<b>87</b>
<b>4.1 Affine Geometrie .....</b>	<b>87</b>
4.1.1 Affine Räume .....	87
4.1.2 Unterräume .....	90
<b>4.2 Lineare Gleichungssysteme .....</b>	<b>92</b>
4.2.1 Begriffe und Fragen .....	92
4.2.2 Exkurs über Matrizen .....	93
4.2.3 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen .....	97
4.2.4 Der Gaußsche Algorithmus .....	102
<b>4.3 Codierungstheorie .....</b>	<b>108</b>
4.3.1 Grundlegende Begriffe .....	108
4.3.2 Lineare Codes .....	111
Richtig oder falsch? .....	117
Übungsaufgaben .....	118
Projekt: Die Hamming-Codes .....	121
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	123
Was sagen Sie dazu? .....	123
<b>5 Lineare Abbildungen .....</b>	<b>124</b>
5.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften .....	124
5.2 Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen .....	130
5.3 Der Homomorphiesatz .....	136
5.4 Der Dualraum .....	139
Richtig oder falsch? .....	143
Übungsaufgaben .....	144
Projekt: $\text{Hom}(V, W)$ .....	147
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	147

<b>6 Polynomringe</b> .....	148
6.1 Ringe.....	148
6.2 Was ist eigentlich $x$ ?.....	150
6.3 Polynomdivision.....	156
6.4 Ideale von $K[x]$ .....	160
Richtig oder falsch?.....	162
Übungsaufgaben.....	163
Projekte.....	166
Projekt A: Der Ring $\mathbf{Z}$ .....	166
Projekt B: Der Ring $\mathbf{H}[x]$ .....	168
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	169
<b>7 Determinanten</b> .....	170
7.1 Die Determinantenfunktion.....	170
7.2 Permutationen.....	173
7.3 Gerade und ungerade Permutationen.....	177
7.4 Die Leibnizsche Determinantenformel.....	182
7.5 Wie berechnet man eine Determinante?.....	186
7.6 Der Multiplikationssatz.....	195
Richtig oder falsch?.....	197
Übungsaufgaben.....	198
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	199
Was sagen Sie dazu?.....	200
<b>8 Diagonalisierbarkeit</b> .....	201
8.1 Eigenvektoren und Eigenwerte.....	202
8.2 Das charakteristische Polynom.....	207
8.3 Das Minimalpolynom.....	213
Richtig oder falsch?.....	221
Übungsaufgaben.....	222
Projekt: Drehungen.....	225
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	226
Was sagen Sie dazu?.....	226
<b>9 Elementarste Gruppentheorie</b> .....	227
9.1 Beispiele von Gruppen.....	227
9.1.1 Gruppen in bekannten Strukturen.....	228
9.1.2 Gruppen aus bekannten Objekten.....	229
9.1.3 Gruppen aus Permutationen.....	230
9.2 Einfache Strukturaussagen für Gruppen.....	233
9.2.1 Untergruppen.....	233
9.2.2 Zyklische Gruppen.....	235
9.2.3 Der Homomorphiesatz.....	238

Richtig oder falsch? .....	241
Übungsaufgaben .....	242
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	244
<b>10 Skalarprodukte</b> .....	<b>245</b>
10.1 Ein Beispiel.....	245
10.2 Bilinearformen .....	247
10.3 Skalarprodukte.....	255
10.4 Orthogonale Abbildungen .....	262
10.5 ... und eine zweite symmetrische Bilinearform? .....	270
Richtig oder falsch? .....	273
Übungsaufgaben .....	274
Projekt: Skalarprodukte komplexer Vektorräume .....	276
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	278
<b>Adieu!</b> .....	<b>279</b>
<b>Lösungsvektoren der □-Aufgaben</b> .....	<b>280</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>282</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>289</b>