

# INHALTSVERZEICHNIS

|  | Seite |
|--|-------|
| 1. Numerische Methoden und Digitalrechentechnik .....                  | 1     |
| 1.1. Vorbemerkungen .....  | 1     |
| 1.2. Programmierung .....  | 2     |
| 1.2.1. Assembler- und Compilersprachen .....                           | 2     |
| 1.2.2. Einige allgemeine Bemerkungen zur Programmierung .....          | 4     |
| 1.2.3. FORTRAN-Programmierung numerischer Methoden .....               | 6     |
| 1.2.4. Einige Bemerkungen zu den Programmen im Text .....              | 8     |
| 2. Matrizennumerik .....   | 11    |
| 2.1. Zusammenstellung wichtiger Grundregeln der Matrizenrechnung ..... | 11    |
| 2.1.1. Lineare Transformation, Matrix, Vektor .....                    | 11    |
| 2.1.2. Der n-dimensionale Vektorraum .....                             | 12    |
| 2.1.3. Einfache Rechenregeln, spezielle Matrizen ..                    | 14    |
| 2.1.4. Einige Eigenschaften linearer Transformationen .....            | 17    |
| 2.1.5. Eigenwerte, Eigenvektoren, quadratische Formen .....            | 19    |
| 2.1.6. Zusammenstellung einiger weiterer Rechenregeln .....            | 20    |
| 2.1.7. Programmierung von Matrizenoperationen .....                    | 22    |
| 2.2. Lineare Gleichungssysteme .....                                   | 25    |
| 2.2.1. Übersicht über die Lösungsverfahren .....                       | 25    |
| 2.2.2. Der GAUSSsche Algorithmus .....                                 | 26    |
| 2.2.3. Der verkettete Algorithmus .....                                | 30    |
| 2.2.4. Das Verfahren von CHOLESKY .....                                | 32    |
| 2.2.5. Bandalgorithmen, Externspeichernutzung .....                    | 36    |
| 2.2.6. Rundungsfehler, Nachiteration .....                             | 45    |
| 2.3. Matrixinversion .....   | 50    |
| 2.3.1. Übersicht .....   | 50    |
| 2.3.2. Inversion einer Rechtsdreiecksmatrix .....                      | 51    |
| 2.3.3. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN .....                            | 53    |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 2.3.4.   | Inversion einer symmetrischen, positiv definiten Matrix .....                             | 56  |
| 2.3.5.   | Inversion von Bandmatrizen .....  | 56  |
| 2.4.     | Eigenwertprobleme .....   | 58  |
| 2.4.1.   | Problemstellungen, Lösungsverfahren .....   | 58  |
| 2.4.2.   | Überführung des allgemeinen in das spezielle Eigenwertproblem .....                       | 60  |
| 2.4.3.   | Das Verfahren von JACOBI .....  | 63  |
| 2.4.4.   | Verfahren auf der Basis der v.MISESschen Vektoriteration .....                            | 69  |
| 2.4.4.1. | Der Grundgedanke der Vektoriteration .....  | 69  |
| 2.4.4.2. | Der RAYLEIGHsche Quotient .....   | 70  |
| 2.4.4.3. | Die inverse Vektoriteration .....   | 72  |
| 2.4.4.4. | Simultaniteration bei symmetrischer Matrix, SCHMIDT'sches Orthonormierungsverfahren ..... | 73  |
| 2.4.4.5. | Das allgemeine Eigenwertproblem .....   | 79  |
| 2.5.     | Hypermatrizen .....   | 84  |
| 2.5.1.   | Multiplikation von Hypermatrizen .....  | 84  |
| 2.5.2.   | "Block"-CHOLESKY-Verfahren .....  | 85  |
| 2.5.3.   | Matrixinversion .....   | 87  |
| 3.       | Das Differenzenverfahren .....  | 89  |
| 3.1.     | Das Differenzenverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen .....                    | 89  |
| 3.1.1.   | Einfache Differenzenformeln .....   | 89  |
| 3.1.2.   | Anwendungsbeispiel: Biegung des geraden Balkens .....                                     | 90  |
| 3.1.3.   | Der Fehler der Differenzenformeln .....   | 93  |
| 3.1.4.   | Verbesserte Differenzenformeln .....  | 94  |
| 3.1.5.   | Der elastisch gebettete Träger .....  | 96  |
| 3.1.6.   | Rand- und Zwischenbedingungen .....   | 98  |
| 3.1.7.   | Stabknickung .....  | 100 |
| 3.1.8.   | Freie Biegeschwingungen des geraden Balkens .....   | 102 |
| 3.2.     | Das Differenzenverfahren für partielle Differentialgleichungen .....                      | 106 |
| 3.2.1.   | Einfache Differenzenformeln in kartesischen Koordinaten .....                             | 106 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 3.2.2.   | POISSONsche Differentialgleichung, Torsion prismatischer Stäbe .....        | 107 |
| 3.2.3.   | Biegung dünner Platten .....  | 109 |
| 3.2.3.1. | Differentialgleichung, Schnittgrößen .....                                  | 109 |
| 3.2.3.2. | Randbedingungen .....   | 112 |
| 3.2.3.3. | Ein Beispiel .....  | 113 |
| 3.2.4.   | Plattenbeulung .....  | 114 |
| 3.3.     | Anwendung des Differenzenverfahrens auf Variationsprobleme .....            | 117 |
| 3.3.1.   | Biegung des geraden Balkens .....   | 117 |
| 3.3.2.   | Plattenbiegung .....  | 121 |
| 3.4.     | Zusammenfassung .....   | 123 |
| 3.4.1.   | Feinheit der Diskretisierung, Genauigkeit .....                             | 123 |
| 3.4.2.   | Anwendungsempfehlungen .....  | 126 |
| 4.       | Die Methode der finiten Elemente .....                                      | 128 |
| 4.1.     | Einführung .....  | 128 |
| 4.2.     | Die Deformationsmethode der Stabstatik .....                                | 129 |
| 4.2.1.   | Vorbetrachtungen .....  | 129 |
| 4.2.1.1. | Begriffsdefinitionen .....  | 129 |
| 4.2.1.2. | Der Berechnungsablauf .....   | 130 |
| 4.2.2.   | Elementsteifigkeitsmatrix des geraden Balkens .....                         | 131 |
| 4.2.3.   | Transformation in ein globales Koordinatensystem .....                      | 133 |
| 4.2.4.   | Kompatibilität und Gleichgewicht, Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix ..... | 134 |
| 4.2.5.   | Randbedingungen, Lösung des Gleichungssystems .....                         | 138 |
| 4.2.6.   | Verteilte Belastung, Elementlasten .....                                    | 140 |
| 4.2.7.   | Praktische Realisierung verschiedener Randbedingungen .....                 | 141 |
| 4.2.8.   | Ein Beispiel .....  | 145 |
| 4.3.     | Grundlagen der Finite-Elemente-Methode .....                                | 149 |
| 4.3.1.   | Finite-Elemente-Methode und RITZsches Verfahren .....                       | 149 |
| 4.3.2.   | Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode .....                          | 152 |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 4.3.3.   | Bedingungen für die Ansatzfunktionen, Konvergenz .....                               | 158 |
| 4.4.     | Ergänzungen zum eindimensionalen Problem .....                                       | 159 |
| 4.4.1.   | Stabknickung .....   | 159 |
| 4.4.2.   | Balkenschwingungen .....   | 162 |
| 4.5.     | Zweidimensionale Probleme .....  | 168 |
| 4.5.1.   | Dreieckselement SD6 zur Scheibenberechnung   | 169 |
| 4.5.2.   | Modifikationen des Elements SD6 (Anisotropie, ebener Formänderungszustand) .....     | 176 |
| 4.5.3.   | Dreiecksringelement DR6 .....  | 177 |
| 4.5.4.   | Dreieckselement PD21 zur Plattenberechnung   | 180 |
| 4.5.4.1. | KIRCHHOFFsche Plattentheorie und Finite-Elemente-Methode .....                       | 180 |
| 4.5.4.2. | Das Dreieckselement PD21 .....   | 181 |
| 4.5.4.3. | Element PD21 zur Berechnung von Beulproblemen .....                                  | 186 |
| 4.6.     | Interpolationsansätze, isoparametrisches Konzept ..                                  | 188 |
| 4.6.1.   | Natürliche Koordinaten .....   | 188 |
| 4.6.2.   | Anwendungsbeispiel: Torsion des prismatischen Stabs .....                            | 193 |
| 4.6.3.   | Interpolationsansätze .....  | 196 |
| 4.6.4.   | Rechteckelement PR16 zur Plattenberechnung   | 201 |
| 4.6.5.   | Das isoparametrische Konzept .....   | 202 |
| 4.6.6.   | Ein Beispiel: Isoparametrische Viereckselemente zur Scheibenberechnung .....         | 206 |
| 4.7.     | Ergänzungen, spezielle Probleme .....  | 209 |
| 4.7.1.   | Dreidimensionale Elemente .....  | 209 |
| 4.7.2.   | Substrukturtechnik, Superelemente .....  | 214 |
| 4.7.3.   | Nichtlineares Stoffgesetz .....  | 219 |
| 4.8.     | Programmierungsprobleme .....  | 227 |
| 4.8.1.   | Typischer Programmablauf .....   | 227 |
| 4.8.2.   | Lösung des Gleichungssystems .....   | 230 |
| 4.9.     | Zusammenfassung .....  | 233 |
| 4.9.1.   | Empfehlungen zur Elementauswahl .....  | 233 |
| 4.9.2.   | Einschätzung der Finite-Elemente-Methode, Vergleich mit dem Differenzenverfahren ... | 236 |

|  |     |
|--|-----|
| 5. Numerische Integration .....  | 239 |
| 5.1. Problemstellung .....   | 239 |
| 5.2. Formeln für die numerische Integration .....  | 241 |
| 5.2.1. NEWTON-COTES-Formeln .....  | 241 |
| 5.2.2. Konvergenzverbesserung, Verfahren von ROMBERG .....                                 | 245 |
| 5.2.3. GAUSSsche Quadraturformeln .....  | 248 |
| 5.2.4. Anwendungsempfehlungen .....  | 250 |
| 5.3. Doppelintegrale für Rechteck- und Dreieckbereiche .                                   | 251 |
| 6. Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (Anfangswertprobleme) ..... | 255 |
| 6.1. Integrationsverfahren, EULER-CAUCHYScher Streckenzug, Methode von HEUN .....          | 256 |
| 6.2. Genauigkeit, Stabilität, Aufwand .....  | 258 |
| 6.3. Verbesserte Integrationsformeln, Verfahren von MILNE und HAMMING .....                | 259 |
| 6.4. RUNGE-KUTTA-Verfahren .....   | 263 |
| 6.4.1. Verfahren 4. Ordnung .....  | 263 |
| 6.4.2. Schrittweitenwahl .....   | 264 |
| 6.4.3. Ein Beispiel .....  | 266 |
| 6.5. Anwendungsempfehlungen .....  | 270 |
| 6.6. Das Verfahren von RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM .....   | 271 |
| 6.7. Lösung von Bewegungsdifferentialgleichungen .....                                     | 275 |
| 6.7.1. Das Aufstellen von Bewegungsdifferentialgleichungen. ....                           | 275 |
| 6.7.2. Ein Beispiel .....  | 277 |
| 6.7.3. Auflösbarkeit nach den Beschleunigungsgliedern .....                                | 280 |
| 6.7.4. Programmierungsprobleme .....   | 285 |
| 7. Nichtlineare Gleichungen .....  | 288 |
| 7.1. Vorbetrachtungen .....  | 288 |
| 7.2. Einfache Iterationsverfahren .....  | 290 |
| 7.3. Zwei Beispiele .....  | 294 |

|  | Seite |
|--|-------|
| 7.4. Polynomgleichungen .....                                    | 300   |
| 7.5. Nichtlineare Gleichungssysteme .....                        | 303   |
| 7.5.1. Das Verfahren von NEWTON für Gleichungs-<br>systeme ..... | 303   |
| 7.5.2. Die REGULA FALSI für Gleichungssysteme .....              | 305   |
| Literaturverzeichnis .....                                       | 310   |
| Verzeichnis der angegebenen Programme .....                      | 314   |
| Sachwortverzeichnis .....  | 315   |