

UNE INTRODUCTION AUX MOTIFS
(MOTIFS PURS, MOTIFS MIXTES, PÉRIODES)

SUB Göttingen 7

217 928 323



2005 A 17799

Yves André

Société Mathématique de France 2004

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique
et du Ministère de la Culture et de la Communication

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	ix
--------------------	----

Partie I. Motifs purs

1. Sources: géométrie énumérative, cohomologie, théorie de Galois ...	3
1.1. Géométrie énumérative	3
1.2. Cohomologie des variétés algébriques	6
1.3. Théorie de Galois	9
2. \otimes-Catégories rigides, catégories tannakiennes	11
2.1. Introduction	11
2.2. \otimes -Catégories rigides	12
2.3. Catégories tannakiennes	14
3. Cycles algébriques et cohomologies (cas des variétés projectives lisses)	17
3.1. Cycles algébriques et relations adéquates	17
3.2. Revue des relations adéquates classiques	19
3.3. Cohomologies de Weil	23
3.4. Revue des cohomologies de Weil classiques	27
4. Motifs purs de Grothendieck	31
4.1. Construction	31
4.2. Functorialités et premières propriétés	35
4.3. Exemples	38
4.4. \otimes -Idéaux et équivalences adéquates	42
4.5. Semi-simplicité des motifs numériques à coefficients dans un corps	44
5. Les conjectures standard	47
5.1. Projecteurs de Künneth et poids	47
5.2. Polarisation I (Lefschetz)	50
5.3. Polarisation II (Hodge)	55
5.4. Équivalences homologique et numérique, et relations entre les conjectures standard	56

6. Groupes de Galois motiviques	61
6.1. Conjecture des signes et modification de la contrainte de commutativité	61
6.2. Réalisation de Betti et groupes de Galois motiviques	63
6.3. Groupes de Galois motiviques et invariants	65
7. Les conjectures de plénitude et de semi-simplicité des réalisations enrichies	67
7.1. Foncteurs de réalisation enrichis	67
7.2. La conjecture de Hodge	74
7.3. La conjecture de Tate	76
7.4. La conjecture d'Ogus	79
7.5. La conjecture des périodes de Grothendieck	82
7.6. Techniques de calcul de groupes de Galois motiviques	85
8. Effectivité	89
8.1. Effectivité et coniveau	89
8.2. Conjectures de Hodge et Tate généralisées	90
9. Comment contourner les conjectures standard	93
9.1. Deux manières de contourner les conjectures standard (aperçus)	93
9.2. Par excès: cycles et correspondances motivés	95
9.3. Par défaut: \otimes -scindage du passage au numérique	97
10. Applications de la théorie des cycles motivés	101
10.1. Transport parallèle de cycles motivés	101
10.2. Cycles de Hodge et cycles de Tate sur les variétés abéliennes	103
10.3. Variation du groupe de Galois motivique dans une famille	105
11. Filtrations sur les anneaux de Chow et nilpotence	109
11.1. Introduction: application d'Abel-Jacobi pour les 0-cycles	109
11.2. Conjectures de Bloch-Beilinson-Murre	111
11.3. Filtration de Saito et équivalences séparées	113
11.4. Le cas d'un corps de base fini	116
11.5. Conjecture de nilpotence de Voevodsky	116
12. Structure de la catégorie des motifs purs pour une équivalence adéquate quelconque	119
12.1. Catégories de Kimura-O'Sullivan	119
12.2. Lien entre motifs de Chow et groupes de Galois motiviques (aperçu de la théorie de O'Sullivan)	124
13. Motifs purs virtuels attachés aux k-variétés (transition vers la mixité)	127
13.1. Le jeu de Boole des k -variétés	127
13.2. Le motif virtuel d'une k -variété	128
13.3. Fonctions zêta motiviques	129

Partie II. Motifs mixtes

14. Pourquoi des motifs mixtes?	135
14.1. La filtration par le poids	135
14.2. Des motifs purs aux motifs mixtes	137
14.3. L'idée de cohomologie motivique	139
15. Le formalisme élémentaire des morphismes multivalués	143
15.1. Correspondances finies entre variétés lisses et transferts	143
15.2. Une construction de Suslin-Voevodsky	144
15.3. La catégorie $c\mathcal{L}(k)$	145
15.4. Homologie de Suslin	146
16. Motifs mixtes de Voevodsky	149
16.1. Complexes dans $c\mathcal{L}(k)$	149
16.2. La catégorie triangulée $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(k)$	151
16.3. Triangles de Mayer-Vietoris	154
17. Twists et cohomologie motivique	157
17.1. Twists et définition de $DM_{\text{gm}}(k)$	157
17.2. La cohomologie motivique	159
17.3. Première classe de Chern d'un fibré en droites et formule du fibré projectif	161
18. Propriétés fondamentales de $DM_{\text{gm}}(k)$	163
18.1. Éclatements et triangle de Gysin	163
18.2. Simplifiabilité des twists	164
18.3. Lien avec les motifs de Chow	164
18.4. Dualité	165
18.5. Comparaison avec les groupes d'homologie de Suslin, avec les groupes de Chow supérieurs et avec la K -théorie	167
19. Complexes de faisceaux motiviques	169
19.1. Préfaisceaux avec transferts et invariance par homotopie	169
19.2. Topologie de Nisnevich et transferts	172
19.3. Le théorème de plongement	175
19.4. Nouvelle description de la cohomologie motivique	176
20. Exemples: 1-motifs et motifs de Tate mixtes	179
20.1. 1-Motifs	179
20.2. Motifs de Tate mixtes	180
20.3. Motifs de Kummer	182
21. Vers le cœur de $DM_{\text{gm}}(k)$	183
21.1. En quête de $MM(k)$. Problèmes de t -structure et peines de cœur	183
21.2. Motifs des variétés affines lisses et « théorème » de Lefschetz faible en cohomologie motivique	187

21.3. Motifs mixtes et conjectures de Bloch-Beilinson-Murre	188
21.4. La catégorie abélienne des motifs mixtes de Nori	189
22. Réalisations mixtes et régulateurs	191
22.1. Réalisations de De Rham-Betti, de Hodge, et de Tate	191
22.2. Régulateurs	193
22.3. Propriétés attendues des réalisations de $MM(k)$	194
22.4. Valeurs de fonctions L , périodes, régulateurs	196
Partie III. Périodes	
23. Relations de périodes	201
23.1. Retour sur la conjecture des périodes de Grothendieck	201
23.2. Estimation du degré de transcendance de certains sous-corps du corps des périodes	204
23.3. Extension au cas mixte	206
23.4. Extension au cas d'un corps de base transcendant	207
23.5. Vers une théorie de Galois pour des nombres transcendants?	209
24. Motifs et valeurs spéciales de la fonction Γ	211
24.1. Valeurs de Γ et périodes d'intégrales abéliennes	211
24.2. Distributions et relations de distribution	213
24.3. Types CM et motifs de type CM	215
24.4. Nature motivique des relations monomiales de Shimura	218
24.5. Da capo: valeurs de Γ comme périodes de Shimura	220
24.6. Conjecture de Rohrlich-Lang et conjecture des périodes	222
25. Motifs et nombres polyzêta	225
25.1. Nombres polyzêta et périodes de motifs de Tate mixtes	225
25.2. Relations de double mélange régularisé	228
25.3. Relations de l'associateur	230
25.4. Conjectures sur l'algèbre des nombres polyzêta	231
25.5. Motifs de Tate mixtes sur \mathbf{Z} , et leur groupe de Galois motivique	232
25.6. Interlude: conjectures de Hodge et Tate pour $MTM(\mathbf{Z})$	234
25.7. Nombres polyzêta et conjecture des périodes de Grothendieck	235
25.8. Nature motivique des relations de double mélange régularisé	238
25.9. Nature motivique des relations de l'associateur	241
Bibliographie	245
Index terminologique	259