

Albrecht Beutelspacher

# Lineare Algebra

**Eine Einführung in die Wissenschaft  
der Vektoren, Abbildungen und Matrizen**

Mit liebevollen Erklärungen, einleuchtenden Beispielen  
und lohnenden Übungsaufgaben, nicht ohne lustige Sprüche,  
launigen Ton und leichte Ironie, dargestellt zu Nutzen  
der Studierenden der ersten Semester

6., durchgesehene und ergänzte Auflage



# Inhaltsverzeichnis

|   |      |
|---|------|
| <b>Vorwort: Mathematik – eine Mutfrage?</b> .....               | v    |
| <b>Inhaltsverzeichnis</b> .....                                 | viii |
| <b>1 Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können</b> ..... | 1    |
| 1.1 Mengen .....  | 1    |
| 1.2 Äquivalenzrelationen .....                                  | 4    |
| 1.3 Abbildungen.....  | 6    |
| 1.4 Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente? .....         | 11   |
| 1.5 Die $\Sigma$ -Notation .....                                | 16   |
| 1.6 Beweisprinzipien.....                                       | 18   |
| Richtig oder falsch? .....                                      | 19   |
| Übungsaufgaben .....  | 20   |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....        | 23   |
| Was sagen Sie dazu? .....                                       | 23   |
| <b>2 Körper</b> .....   | 24   |
| 2.1 Die Definition .....  | 24   |
| 2.2 Beispiele von Körpern .....                                 | 27   |
| 2.2.1 Der Körper der komplexen Zahlen.....                      | 27   |
| 2.2.2 Der Quaternionenschiefkörper .....                        | 30   |
| 2.2.3 Einige endliche Körper .....                              | 33   |
| 2.3 Automorphismen von Körpern .....                            | 39   |
| 2.3.1 Die Definitionen .....                                    | 39   |
| 2.3.2 Der Körper der rationalen Zahlen.....                     | 40   |
| 2.3.3 Der Körper der reellen Zahlen.....                        | 41   |
| 2.3.4 Konjugiert-komplexe Zahlen.....                           | 42   |
| Richtig oder falsch? .....                                      | 43   |
| Übungsaufgaben .....  | 44   |
| Projekt: Die Gaußsche Zahlenebene .....                         | 46   |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....        | 47   |
| <b>3 Vektorräume</b> .....                                      | 48   |
| 3.1 Die Definition .....  | 48   |
| 3.2 Beispiele von Vektorräumen.....                             | 50   |
| 3.2.1 Vektorräume mit Hilfe von Geometrie.....                  | 50   |
| 3.2.2 Der Vektorraum $K^n$ .....                                | 50   |
| 3.2.3 Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen.....          | 50   |
| 3.2.4 Der Vektorraum aller unendlichen Folgen .....             | 51   |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.2.5    | Ein Vektorraum unendlicher Folgen .....                        | 52         |
| 3.2.6    | Vektorräume von Funktionen .....                               | 52         |
| 3.2.7    | Lösungen eines Gleichungssystems .....                         | 52         |
| 3.2.8    | Teilmengen einer Menge .....                                   | 52         |
| 3.2.9    | Körper als Vektorräume .....                                   | 53         |
| 3.3      | Elementare Theorie der Vektorräume .....                       | 54         |
| 3.3.1    | Der Begriff der Basis .....                                    | 54         |
| 3.3.2    | Der Steinitzsche Austauschsatz .....                           | 61         |
| 3.3.3    | Der Dimensionssatz .....                                       | 67         |
| 3.3.4    | Faktorräume .....  | 69         |
| 3.4      | Zur Geschichte der linearen Algebra .....                      | 75         |
|          | Richtig oder falsch? .....                                     | 77         |
|          | Übungsaufgaben .....   | 79         |
|          | Projekt: Der unendlichdimensionale Vektorraum $V_\infty$ ..... | 84         |
|          | Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....      | 86         |
| <b>4</b> | <b>Anwendungen von Vektorräumen</b> .....                      | <b>87</b>  |
| 4.1      | Affine Geometrie .....   | 87         |
| 4.1.1    | Affine Räume .....   | 87         |
| 4.1.2    | Unterräume .....   | 90         |
| 4.2      | Lineare Gleichungssysteme .....                                | 92         |
| 4.2.1    | Begriffe und Fragen .....                                      | 92         |
| 4.2.2    | Exkurs über Matrizen .....                                     | 93         |
| 4.2.3    | Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen .....               | 97         |
| 4.2.4    | Der Gaußsche Algorithmus .....                                 | 102        |
| 4.3      | Codierungstheorie .....  | 108        |
| 4.3.1    | Grundlegende Begriffe .....                                    | 108        |
| 4.3.2    | Lineare Codes .....  | 111        |
|          | Richtig oder falsch? .....                                     | 117        |
|          | Übungsaufgaben .....   | 118        |
|          | Projekt: Die Hamming-Codes .....                               | 121        |
|          | Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....      | 123        |
|          | Was sagen Sie dazu? .....                                      | 123        |
| <b>5</b> | <b>Lineare Abbildungen</b> .....                               | <b>124</b> |
| 5.1      | Definitionen und grundlegende Eigenschaften .....              | 124        |
| 5.2      | Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen .....      | 130        |
| 5.3      | Der Homomorphiesatz .....                                      | 136        |
| 5.4      | Der Dualraum .....   | 139        |
|          | Richtig oder falsch? .....                                     | 143        |
|          | Übungsaufgaben .....   | 144        |
|          | Projekt: Hom $(V, W)$ .....                                    | 147        |
|          | Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....      | 147        |

|  |      |
|--|------|
| <b>6 Polynomringe</b> .....                              | 148  |
| 6.1 Ringe .....  | 148  |
| 6.2 Was ist eigentlich $x$ ? .....                       | 150  |
| 6.3 Polynomdivision .....                                | 156  |
| 6.4 Ideale von $K[x]$ .....                              | 160  |
| Richtig oder falsch? .....                               | 162  |
| Übungsaufgaben .....                                     | 163  |
| Projekte .....   | 166  |
| Projekt A: Der Ring $\mathbf{Z}$ .....                   | 166  |
| Projekt B: Der Ring $\mathbf{H}[x]$ .....                | 168  |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:..... | 169  |
| <b>7 Determinanten</b> .....                             | 170  |
| 7.1 Die Determinantenfunktion .....                      | 170  |
| 7.2 Permutationen .....                                  | 173  |
| 7.3 Gerade und ungerade Permutationen .....              | 177  |
| 7.4 Die Leibnizsche Determinantenformel .....            | 182  |
| 7.5 Wie berechnet man eine Determinante? .....           | 186  |
| 7.6 Der Multiplikationssatz.....                         | 195  |
| Richtig oder falsch? .....                               | 197  |
| Übungsaufgaben .....                                     | 198  |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:..... | 199  |
| Was sagen Sie dazu? .....                                | 200  |
| <b>8 Diagonalisierbarkeit</b> .....                      | 201  |
| 8.1 Eigenvektoren und Eigenwerte .....                   | 202  |
| 8.2 Das charakteristische Polynom .....                  | 207  |
| 8.3 Das Minimalpolynom .....                             | 213  |
| Richtig oder falsch? .....                               | 221  |
| Übungsaufgaben .....                                     | 222  |
| Projekt: Drehungen .....                                 | 225  |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:..... | 226  |
| Was sagen Sie dazu? .....                                | 226  |
| <b>9 Elementarste Gruppentheorie</b> .....               | 227, |
| 9.1 Beispiele von Gruppen.....                           | 227  |
| 9.1.1 Gruppen in bekannten Strukturen.....               | 228  |
| 9.1.2 Gruppen aus bekannten Objekten.....                | 229  |
| 9.1.3 Gruppen aus Permutationen.....                     | 230  |
| 9.2 Einfache Strukturaussagen für Gruppen .....          | 233  |
| 9.2.1 Untergruppen .....                                 | 233  |
| 9.2.2 Zyklische Gruppen .....                            | 235  |
| 9.2.3 Der Homomorphiesatz.....                           | 238  |

|   |            |
|---|------------|
| Richtig oder falsch? .....                                | 241        |
| Übungsaufgaben .....                                      | 242        |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....  | 244        |
| <b>10 Skalarprodukte.....</b>                             | <b>245</b> |
| 10.1 Ein Beispiel.....                                    | 245        |
| 10.2 Bilinearformen.....                                  | 247        |
| 10.3 Skalarprodukte.....                                  | 255        |
| 10.4 Orthogonale Abbildungen .....                        | 262        |
| 10.5 ... und eine zweite symmetrische Bilinearform?.....  | 270        |
| Richtig oder falsch? .....                                | 273        |
| Übungsaufgaben .....                                      | 274        |
| Projekt: Skalarprodukte komplexer Vektorräume .....       | 276        |
| Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: ..... | 278        |
| <b>Adieu! .....</b>                                       | <b>279</b> |
| <b>Lösungsvektoren der □-Aufgaben .....</b>               | <b>280</b> |
| <b>Tipps zur Lösung der Übungsaufgaben.....</b>           | <b>282</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis .....</b>                         | <b>304</b> |
| <b>Literaturverzeichnis.....</b>                          | <b>311</b> |