

Dörte Haftendorn

# Mathematik sehen und verstehen

Schlüssel zur Welt

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ziel dieses Buches . . . . .	2
1.2	Historisches zur Lehre von Mathematik . . . . .	2
1.3	Vorgehen in diesem Buch . . . . .	3
1.4	Die Kapitel . . . . .	4
1.5	Einige Bemerkungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Kryptografie</b>	<b>9</b>
2.1	Die alte und die neue Kryptografie . . . . .	10
2.2	Primzahlen . . . . .	14
2.3	Restklassen modulo $n$ . . . . .	17
2.3.1	Der Modul der Restklassen modulo $n$ . . . . .	19
2.3.2	Allgemeines Rechnen modulo $n$ . . . . .	20
2.3.3	Multiplizieren modulo $n$ . . . . .	22
2.3.4	Potenzieren modulo $n$ . . . . .	24
2.3.5	Inversenbestimmung modulo $n$ . . . . .	28
2.3.6	Größter gemeinsamer Teiler und euklidischer Algorithmus . . . . .	29
2.4	Kryptografische Verfahren . . . . .	32
2.4.1	Diffie-Hellman-Schlüsselvereinbarung . . . . .	33
2.4.2	RSA-Verschlüsselung . . . . .	35
2.4.3	Digitale Signatur . . . . .	40
2.4.4	Zertifizierung der öffentlichen Schlüssel . . . . .	41
2.5	Rückblick auf die moderne Kryptografie . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Codierung</b>	<b>45</b>
3.1	Europäische Artikelnummer: EAN . . . . .	45
3.2	ISBN-13 und ISBN-10 . . . . .	49
3.3	Codierung mit 0 und 1 ist überall . . . . .	51
3.4	Rückblick auf die Codierung . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Graphentheorie</b>	<b>57</b>
4.1	Allerlei Graphen . . . . .	57
4.1.1	Euler, Königsberg und Graphen . . . . .	58
4.1.2	Beschreibung von Graphen . . . . .	62
4.2	Aufspannende Bäume . . . . .	64
4.2.1	Minimale Spannbäume . . . . .	65
4.2.2	Spannbäume in ungewichteten Graphen . . . . .	66
4.3	Kürzeste Wege . . . . .	68
4.4	Färbungen . . . . .	73
4.5	Graphentheorie: Rückblick und Ausblick . . . . .	76

<b>5</b>	<b>Fraktale, Chaos, Ordnung</b>	<b>79</b>
5.1	Idee von Rekursion und Iteration . . . . .	81
5.1.1	Spinnwebdarstellung rekursiver Folgen . . . . .	82
5.1.2	Wachstumsvorgänge . . . . .	84
5.1.3	Feigenbaumdiagramm . . . . .	86
5.2	Fraktale und Dimension . . . . .	89
5.2.1	Wegfraktale, Lindenmayer-Systeme . . . . .	89
5.2.2	Selbstähnlichkeit und Dimension . . . . .	93
5.2.3	Iterierte-Funktionen-Systeme (IFS) . . . . .	95
5.3	Mandelbrot- und Julia-Mengen . . . . .	100
5.3.1	Das echte Apfelmännchen . . . . .	100
5.3.2	Julia-Mengen . . . . .	105
5.4	Muster der Natur . . . . .	108
5.4.1	Zelluläre Automaten . . . . .	108
5.4.2	Spiralen mit goldenem Winkel . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Welt der Funktionen</b>	<b>117</b>
6.1	Funktionsfamilien . . . . .	120
6.1.1	Parabeln und elementare Variationen . . . . .	120
6.1.2	Geraden und Potenzfunktionen . . . . .	127
6.1.3	Polynome in ihrer Vielfalt . . . . .	130
6.1.4	Sinus, Kosinus und Musik . . . . .	137
6.1.5	Exponentialfunktionen . . . . .	142
6.1.6	Umkehrfunktionen . . . . .	144
6.2	Funktionsbauhof . . . . .	147
6.2.1	Summe von Funktionen . . . . .	147
6.2.2	Produkt von Funktionen . . . . .	149
6.2.3	Verkettung von Funktionen . . . . .	150
6.3	Blick auf den Punkt: Ableitung . . . . .	151
6.3.1	Ableitungsfunktion . . . . .	152
6.3.2	Die e-Funktion, das Geheimnis wird gelüftet . . . . .	157
6.4	Blick auf das Ganze: das Integral . . . . .	159
6.4.1	Definition des Integrals . . . . .	162
6.4.2	Weitere Anwendungen des Integrals . . . . .	165
6.5	Großartiger Zusammenhang . . . . .	166
6.6	Funktionen in höheren Räumen . . . . .	171
6.6.1	Funktionen im 3D-Raum . . . . .	171
6.6.2	Mathematische 3D-Lösungen im Bauwesen . . . . .	175
6.6.3	Noch höher hinaus . . . . .	178
<b>7</b>	<b>Optimierung als Ziel</b>	<b>181</b>
7.1	Extremwertaufgaben . . . . .	181
7.2	Gewinnoptimierung . . . . .	184
7.3	Lineare Optimierung . . . . .	184
7.4	Minimalflächen . . . . .	186

7.5	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	188
7.6	Optimierung ist überall . . . . .	190
<b>8</b>	<b>Computer und Mathematik</b>	<b>193</b>
8.1	Binärsystem . . . . .	194
8.2	Zahldarstellung im Computer . . . . .	199
8.3	Numerisch arbeitende Werkzeuge . . . . .	203
8.4	Dynamische Mathematik . . . . .	205
8.5	Computer-Algebra-Systeme (CAS) . . . . .	209
8.6	Berechenbarkeit . . . . .	211
8.7	Computer in unserer Welt . . . . .	215
<b>9</b>	<b>Numerik</b>	<b>217</b>
9.1	Numerische Verfahren der Analysis . . . . .	217
9.1.1	Heron-Verfahren für Wurzeln . . . . .	217
9.1.2	Nullstellensuche . . . . .	219
9.1.3	Numerische Integration . . . . .	222
9.2	Für alle Fälle: Polynome . . . . .	226
9.2.1	Ein Taylor schneidert Polynomkleider, die fast passen . . . . .	226
9.2.2	Zwischenwerte: Interpolation mit Polynomen . . . . .	228
9.2.3	Splines: damit es in der richtigen Weise krumm wird . . . . .	229
9.2.4	Bézier-Splines: frei gestaltete Formen . . . . .	230
9.3	Fourier-Reihen . . . . .	232
9.4	Differenzialgleichungen . . . . .	236
9.5	Ohne Numerik geht es nicht . . . . .	237
<b>10</b>	<b>Stochastik</b>	<b>239</b>
10.1	Beschreibende Statistik . . . . .	239
10.2	Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	241
10.2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .	242
10.2.2	Axiome von Kolmogorow . . . . .	244
10.2.3	Mehrstufige Zufallsversuche . . . . .	246
10.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Verteilung . . . . .	247
10.3.1	Kombinatorik . . . . .	249
10.3.2	Binomialverteilung . . . . .	252
10.3.3	Kumulierte Verteilungsfunktionen . . . . .	258
10.3.4	Normalverteilung . . . . .	260
10.4	Beurteilende Statistik . . . . .	266
10.4.1	Schätzen . . . . .	267
10.4.2	Testen . . . . .	269
10.5	Stochastik im Rückblick . . . . .	278
<b>11</b>	<b>Geometrie</b>	<b>279</b>
11.1	Der goldene Schnitt . . . . .	280
11.2	Die Kegelschnitte . . . . .	285

11.3	Reflexion bei Parabeln . . . . .	289
11.4	Reflexion bei Ellipsen und Hyperbeln . . . . .	293
11.5	Kaustiken und Katakaustiken . . . . .	298
11.6	Geometrie im Rückblick . . . . .	299
<b>12</b>	<b>Selbstverständnis der Mathematik</b>	<b>301</b>
12.1	Mathematiker und Mathematikerinnen . . . . .	301
12.2	Algebra und Zahlaufbau . . . . .	303
12.3	Mathematische Schönheit . . . . .	307
12.4	Beweisen . . . . .	309
12.5	Die unlösbaren Probleme der Antike . . . . .	314
12.6	Fazit . . . . .	316
<b>13</b>	<b>Lösungen</b>	<b>317</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>323</b>
	<b>Index</b>	<b>333</b>