

Vasili P. Minorski

# **Aufgabensammlung der höheren Mathematik**

Bearbeitet von Prof. Klaus Dibowski und Dr. Horst Schlegel

15., aktualisierte Auflage

Mit 68 Bildern und 2670 Aufgaben mit Lösungen



**Fachbuchverlag Leipzig**  
im Carl Hanser Verlag

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Wiederholung Elementarmathematik</b>	<b>9</b>
0.1	Polynomdivision (Partialdivision) . . . . .	9
0.2	Potenzen . . . . .	9
0.3	Wurzeln . . . . .	10
0.4	Logarithmen . . . . .	11
0.5	Quadratische und biquadratische Gleichungen . . . . .	12
0.6	Wurzelgleichungen . . . . .	13
0.7	Goniometrische Gleichungen . . . . .	14
<b>1</b>	<b>Einführende Grundlagen</b>	<b>16</b>
1.1	Notwendige und hinreichende Bedingungen, Beweismethoden . . . . .	16
1.2	Mengen, Abbildungen, Funktionen . . . . .	18
1.3	Reelle Zahlen . . . . .	20
1.3.1	Darstellung reeller Zahlen . . . . .	20
1.3.2	Beträge und Ungleichungen . . . . .	22
1.3.3	Fakultät, Binomialkoeffizient, binomischer Lehrsatz . . . . .	24
1.4	Kombinatorik . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>29</b>
2.1	Darstellungsformen, Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	29
2.2	Horner-Schema, Vietascher Wurzelsatz . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Vektorrechnung, Analytische Geometrie</b>	<b>34</b>
3.1	Darstellung von und Rechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	34
3.2	Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt . . . . .	37
3.3	Geradengleichung . . . . .	40
3.4	Ebenengleichung . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>47</b>
4.1	Determinanten . . . . .	47
4.2	Matrizen . . . . .	49
4.3	$n$ -dimensionaler reeller Vektorraum . . . . .	52
4.4	Rang von Matrizen, <i>Gaußscher</i> Algorithmus . . . . .	54
4.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	57
4.5.1	Die <i>Cramersche</i> Regel . . . . .	57
4.5.2	Das (allgemeine) lineare Gleichungssystem (LGS) . . . . .	58
4.6	Inverse Matrix (Austauschverfahren) . . . . .	61
4.7	Lineare Transformationen . . . . .	64
4.7.1	Affine und orthogonale Transformationen . . . . .	64

4.7.2	Eigenwerte, Eigenvektoren . . . . .	66
4.7.3	Hauptachsentransformation für Kurven und Flächen 2. Ordnung . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Zahlenfolgen und Zahlenreihen</b>	<b>72</b>
<b>6</b>	<b>Differenzialrechnung für reelle Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>78</b>
6.1	Darstellung und Eigenschaften von Funktionen . . . . .	78
6.2	Grenzwert einer Funktion . . . . .	81
6.3	Stetigkeit einer Funktion . . . . .	83
6.4	Ableitung und Differenzial einer Funktion . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Mittelwertsätze der Differenzialrechnung und Taylor-Formel</b>	<b>91</b>
7.1	Mittelwertsätze . . . . .	91
7.2	Grenzwertsätze von Bernoulli-l'Hospital . . . . .	92
7.3	Taylor-Formel . . . . .	93
7.4	Relative Extrema, Kurvendiskussion . . . . .	95
7.5	Newtonsches Verfahren . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Integralrechnung für reelle Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>102</b>
8.1	Unbestimmtes Integral . . . . .	102
8.1.1	Grundintegrale, Integrationsregeln . . . . .	102
8.1.2	Integration rationaler Funktionen . . . . .	107
8.1.3	Integration weiterer Funktionenklassen . . . . .	110
8.1.4	Vermischte Aufgaben zur Integration . . . . .	111
8.2	Das Riemannsche Integral . . . . .	113
8.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	116
8.4	Trapezformel, Simpsonsche Regel . . . . .	118
8.4.1	Trapezformel . . . . .	118
8.4.2	Simpsonsche Regel . . . . .	119
<b>9</b>	<b>Elemente der Differenzial- und Integralgeometrie</b>	<b>121</b>
9.1	Kurvendarstellungen . . . . .	121
9.2	Tangente, Krümmung ebener Kurven, Normalebene . . . . .	123
9.3	Inhalt ebener Flächen . . . . .	129
9.4	Bogenlänge eines Kurvenstückes, Krümmung von Raumkurven . . . . .	131
9.5	Volumen, Mantelfläche von Rotationskörpern . . . . .	136
9.6	Aufgaben aus der Physik . . . . .	139
<b>10</b>	<b>Funktionenreihen</b>	<b>142</b>
10.1	Grundbegriffe . . . . .	142
10.2	Potenzreihen und Taylor-Reihen . . . . .	144
10.3	Fourier-Reihen . . . . .	148

<b>11 Differenzialrechnung für reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>151</b>
11.1 Niveaulinien, -flächen, -hyperflächen . . . . .	151
11.2 Grenzwert, Stetigkeit . . . . .	152
11.3 Partielle Ableitung, Gradient, Richtungsableitung . . . . .	154
11.4 Zerlegungssatz, totales Differenzial . . . . .	157
11.5 Fehlerrechnung . . . . .	159
11.6 Tangentialebene, Flächennormale . . . . .	161
11.7 Kettenregel . . . . .	162
11.8 Taylor-Formel . . . . .	165
11.9 Lokale Extrema . . . . .	166
11.10 Extrema bei Nebenbedingungen in Gleichungsform . . . . .	168
<b>12 Bereichs- und Mehrfachintegrale</b>	<b>171</b>
12.1 Integrale über ebene Bereiche (Flächenintegrale) . . . . .	171
12.2 Integrale über räumliche Bereiche (Raumintegrale) . . . . .	173
12.3 Substitution . . . . .	176
<b>13 Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>181</b>
13.1 Begriff der Differenzialgleichung . . . . .	181
13.2 Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	182
13.2.1 Differenzialgleichungen mit getrennten Veränderlichen . . . . .	182
13.2.2 Durch Substitution lösbare Differenzialgleichungen . . . . .	185
13.2.3 Lineare Differenzialgleichungen (Variation der Konstanten) . . . . .	187
13.2.4 Bernoullische Differenzialgleichungen . . . . .	188
13.2.5 Exakte Differenzialgleichungen, integrierender Faktor . . . . .	189
13.3 Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	191
13.3.1 Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	191
13.3.2 Eulersche Differenzialgleichungen . . . . .	196
13.4 Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	197
13.5 Näherungsmethoden . . . . .	199
13.5.1 Potenzreihenansatz . . . . .	199
13.5.2 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	199
<b>14 Vektoranalysis</b>	<b>202</b>
14.1 Felder, Differenzialoperatoren . . . . .	202
14.2 Kurvenintegrale . . . . .	205
14.3 Oberflächenintegrale . . . . .	211
14.4 Integralsätze . . . . .	214